PRÁCTICA 1

RECTAS Y PLANOS EN $\mathbf{R^2}$ Y $\mathbf{R^3}$

1. **a)** Representar en $\mathbf{R}^2$ los puntos:

A = (3,3) B = (−2,1) C = 2A D = −A

E = A + B F = B − A G = −B.

b) Calcular las coordenadas de C, D, E y F.

c) Representar en el plano 5 puntos de la forma kA, con k un número real.

d) Representar en el plano 5 puntos de la forma kF, con k un número real.

2. **a)** Encontrar un punto P de la forma (x,2x) que verifique P + (1,−2) = (3,2).

b) ¿Existe un punto Q de la forma (x, x+2) que verifique Q + (1,1) = (2,5)?

c) Encontrar todos los a y b en **R** para los cuales sea

2(a,−1) + (1,3) = (5,−b).

3. Representar en $\mathbf{R}^2$:

a) todos los puntos de abscisa 3

b) todos los puntos de abscisa mayor o igual que 3

c) todos los puntos de ordenada −1 y abscisa x tal que $x^2 = 16$.

4. **a)** Representar la recta que pasa por los puntos (1,−1) y (−2,2).

b) En cada caso decidir si el punto P pertenece a la recta representada:

i) P = (2,1); ii) P = (0,0); iii) P = (−2,3); iv) P = (x,−x) .

c) Representar la recta que pasa por los puntos (1,2) y (1,5).

5. Dar las ecuaciones paramétrica e implícita de las rectas del ejercicio **4**.

6. Dar las ecuaciones paramétrica e implícita de la recta que pasa por los puntos (3,1) y (4,−1).

7. **a)** Dar las coordenadas de dos puntos de la recta de ecuación x + y = −2.

b) Graficarla y dar su ecuación paramétrica.

8. Dar la ecuación:

a) implícita de la recta L: X = β (5,−1) + (2,1)

b) implícita de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (−3,2)

c) paramétrica de la recta que pasa por los puntos (5,5) y (4,−1)

d) paramétrica de la recta L_1: $x + 3y = -1$

e) implícita de la recta L_2: $X = \alpha(1,5) + (2,0)$.

9. **a)** Escribir la ecuación implícita de las rectas de los ejercicios **8.c)** y **8.d)**.

b) Determinar la pendiente de esas rectas.

10. Dar la ecuación de la recta:

a) de pendiente 2 que pasa por (−1,0)

b) de pendiente 0 que pasa por (1,3).

11. Hallar un punto P de modo que la pendiente de la recta que pasa por P y por (3,1) sea −4.

12. Representar gráficamente, en el mismo plano, las rectas

L_1: $-x + 3y = 2$ y L_2: $-x + 3y = -2$.

Comparar sus pendientes.

13. **a)** Dar la ecuación paramétrica de la recta paralela a

L: $X = \beta(2,-3) + (1,1)$ que pasa por (0,0).

b) Dar la ecuación implícita de la recta paralela a L: $3x + 2y = 3$ que pasa por (−1,1).

14. Las ganancias de cierta empresa crecen linealmente. El primer año fueron de \$ 750 y en el quinto año llegaron a \$ 6750.

a) Plantear la ecuación que representa las ganancias en función de los años transcurridos. Graficarla.

b) ¿Cuál será la ganancia a los 12 años de instalada?

c) ¿Cuándo llegará a ser de \$ 21750?

15. El costo de un viaje en taxi es una suma fija más una cantidad por cuadra recorrida. Si cobra \$ 3,90 por un recorrido de 10 cuadras y \$ 6,24 por un recorrido de 23 cuadras:

a) expresar el costo en función de las cuadras recorridas

b) indicar la suma fija

c) indicar cuántas cuadras se recorrieron si se pagaron $ 5,16.

16. La factura mensual por el uso de un teléfono celular se compone de un cargo fijo y cierta cantidad por minuto utilizado. Por un mes con 30 minutos de uso se pagaron $ 39 y por otro, con 23 minutos de uso, se pagaron $ 36,20.
¿Cuál es el cargo fijo y cuál es la cantidad que se paga por minuto?

17. Hallar la intersección de las rectas L_1 y L_2 si:

a) L_1: $3x + y = -3$ y L_2: $X = \alpha(1,3) + (2,0)$

b) L_1: $-2x + 3y + 13 = 0$ y L_2: $y = 7x + 2$

c) L_1: $X = \alpha(-4, 1) + (2,1)$ y L_2: $X = \alpha(1,2) + (0,-1)$.

18. En cada caso graficar las rectas, analizar las posiciones relativas y encontrar los puntos de intersección:

a) L_1: $2x + y = 3$ L_2: $2x - y = 1$

b) L_1: $x + 3y = 6$ L_2: $-2x - 6y = 2$

c) L_1: $x - 2y = -1$ L_2: $3x - 6y = -3$

d) L_1: $x - y = 3$ L_2: $-2x + y = 1$

e) L_1: $x - y = 3$ L_2: $3x + y = 5$

19. Sean L_1: $x - 2y = 2$; L_2: $-2x + y = -3$ y L_3: $X = t\,(1,-7)$.
Dar la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto de intersección de L_1 y L_2 y por el punto de intersección de L_2 y L_3.

20. L es la recta que pasa por $P = (1,-3)$ y $Q = (2,-4)$. Hallar *b* tal que la recta que es paralela a L y pasa por $(b,5)$, también pase por $(2,2)$.

21. Dos empresas familiares fabrican zapatos deportivos.
La empresa A hizo una inversión inicial de $ 2800 y cada par de zapatos que vende le rinde una ganancia de $ 7. La ganancia de la empresa B está dada, en función de los pares de zapatos vendidos, por la fórmula $g(x) = 11\,x - 5500$.

a) ¿Cuál de las dos empresas hizo una mayor inversión inicial?

b) ¿Cuántos pares de zapatos debe vender la empresa A para recuperar su inversión inicial?

c) ¿A partir de cuántos pares de zapatos vendidos, la ganancia de la empresa B será mayor que la de la empresa A?

22. Un fabricante de guantes tiene costos fijos mensuales de \$ 2100 y de \$1,20 por cada par de guantes que produce.
Si vende cada par de guantes a \$5,40, encontrar el *punto de equilibrio* y el costo de producción en ese punto.
Observación: El *punto de equilibrio* es el nivel de producción mensual necesario para cubrir el costo de producción.

23. La fábrica de empanadas *El Repulgo* invirtió \$ 5200 en instalaciones y obtiene \$ 3,60 de ganancia por la venta de cada docena de empanadas. La fábrica *Pachamama* hizo una inversión inicial de \$ 1600 y la ganancia que obtiene por cada docena de empanadas es la mitad de la que obtiene *El Repulgo.* ¿A partir de cuántas docenas de empanadas *El Repulgo* obtiene más ganancia que *Pachamama* ?

24. Representar en $\mathbf{R}^3$: A = (2,0,0)   B = (2,2,0)   C = (2,2,2)
D = (0,0,−1)   E = (0,3,1)   F = (2,0,−1).

25. Si A = (0,0,2);   B = (4,0,0)   y   C = A + B,

a) representar A, B y C

b) calcular las coordenadas de C.

26. Un cubo tiene vértices en (0,0,0); (2,0,0); (0,2,0) y (0,0,2); escribir las coordenadas de los otros 4 vértices del cubo.

27. a) Si A = (1,1,−2); B = (−1,−3, 4) y C = (1,−1, 0), hallar α tal que αA + B = C.

b) Encontrar, si es posible, α y β tales que

i) (1,3,0) = α(1,2,−1) + β(0,2,2)

ii) (1,2,2) = α(1,2,0) + β(0,2,0).

28. Escribir la ecuación paramétrica de la recta:

a) que tiene dirección (1,−1,2) y pasa por el origen de coordenadas

b) que tiene dirección (1,−1,2) y pasa por el punto (0,2,−3)

c) que es paralela a L: λ (2,1,−1) + (−2, 4,1) y pasa por el punto (0,3,2)

d) que pasa por el punto (3,4,−1) y por el origen de coordenadas

e) que pasa por los puntos (1,5,1) y (−4,3,2).

29. Sean en $\mathbf{R}^3$ las rectas L_1: λ (1,2,−1) + (1,3,5) y L_2 que es paralela a L_1 y pasa por el punto (3,2,4)

a) hallar el punto de L_2 que tiene coordenada $x_3 = 0$

b) decidir si los puntos (−1,−1,7) y (1,−2,6) están en L_2.

30. Hallar todos los valores de *k* para los cuales la recta que pasa por los puntos (1,−1,1) y (4, *k*,−2) es paralela a la recta L: t(1,2,−1) + (0,3,2).

31. Dadas las rectas L_1: α(1,2,1) + (2,3,2) L_2: β(0,1,−1) + (1,3,−1)

L_3: γ(2,4,2) + (1,5,0) L_4: δ(2,4,2) + (3,5,3)

a) hallar: **i)** $L_1 \cap L_2$ **ii)** $L_1 \cap L_3$

iii) $L_2 \cap L_3$ **iv)** $L_1 \cap L_4$

b) analizar las posiciones relativas de cada par de rectas.

32. Sean la recta L: β(1,1,−2) + (0,0,3) y el punto A = (3,1,0); determinar un punto B tal que la recta que pasa por A y B sea paralela a L.

33. Dar las coordenadas de 3 puntos que estén:

a) en el plano coordenado x_1x_2

b) en el plano paralelo al plano coordenado x_1x_2, que contiene al punto (0,0,1).

34. Escribir la ecuación paramétrica y representar en $\mathbf{R}^3$ el plano:

a) que pasa por los puntos A = (0,0,0), B = (1,0,0) y C = (0,1,0)

b) que pasa por los puntos A = (0,0,1), B = (1,0,1) y C = (0,1,1)

c) coordenado $x_1\,x_2$, Comparar con **a)**

d) que pasa por los puntos A = (0,0,0), B = (2,0,1) y C = (1,0,3)

e) que pasa por los puntos A = (1,3,1), B = (2,1,1) y C = (3,4,1).

35. Dar la ecuación implícita de:

a) todos los planos coordenados

b) todos los planos del ejercicio **34**.

36. Hallar las intersecciones de los planos Π_1 y Π_2 en cada caso:

a) Π_1: $x_1 = 0$ Π_2: $x_3 = 0$

b) Π_1: $x_2 = 0$ Π_2: $x_3 = 2$

c) Π_1: $x_1 + x_3 = 0$ Π_2: $x_2 - x_3 = 0$

d) Π_1: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ Π_2: $2x_1 + x_3 = 2$

e) Π_1: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ Π_2: $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$

f) Π_1: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ Π_2: $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$

37. Dar las ecuaciones implícitas de las rectas:

a) L_1: $\alpha(1,3,1) + (2,0,0)$

b) L_2: $\beta(-3,0,1) + (1,1,1)$

38. Dar la ecuación implícita de un plano Π que contenga a la recta L: $\beta(1,-1,0) + (2,0,1)$.

39. Encontrar el valor de a para que la recta que pasa por (1,a,2) y (1,5,4) sea paralela a la recta dada por L: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$.

40. Hallar la intersección de la recta L con el plano Π si:

a) L: $\alpha(1,2,1) + (2,2,3)$ Π: $x_3 = 0$

b) L: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$ Π: $x_2 = 3$

c) L: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$ Π: $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,-2) + (0,0,1)$

d) L: $\alpha(0,1,-1) + (0,1,1)$ Π: $x_2 + x_3 = 2$

e) L: $\alpha(0,1,-1) + (0,1,1)$ Π: $x_2 + x_3 = 0$

41. Un emprendedor gastronómico dispone de un presupuesto de \$ 900 semanales para comprar lechuga, tomate y zanahoria. Un kilo de lechuga cuesta \$ 25, un kilo de tomate cuesta \$ 30 y un kilo de zanahoria cuesta \$ 10.

i) Plantear la ecuación presupuestaria y graficarla.

ii) Determinar la máxima cantidad de zanahoria que puede comprar con ese presupuesto.

iii) Si compra 12 kilos de lechuga y 4 kilos de tomates, ¿cuántos kilos de zanahoria debe comprar para agotar el presupuesto?

42. Se dispone de un presupuesto de \$ 400 para la compra de cuadernos y biromes. Cada cuaderno cuesta \$ 16 y con ese presupuesto se pueden comprar a lo sumo 80 biromes.

i) Plantear la ecuación presupuestaria y graficarla.

ii) Si se compran 32 biromes, ¿cuántos cuadernos se deben comprar para agotar el presupuesto?

iii) ¿Cuál es la máxima cantidad de cuadernos que se pueden comprar?

43. La ecuación presupuestaria de un consumidor que dispone de \$ 1800 para la compra de tres productos A, B y C es: $ax + by + 10z = 1800$ donde $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ .La máxima cantidad de unidades del producto A que el consumidor puede comprar es 45. Si compra 20 unidades de A, 26 unidades de B y 22 unidades de C, el consumidor gasta todo el presupuesto.

i) Determinar los valores de a y b.

ii) ¿Cuál es el máximo de unidades que puede comprar del producto B?

iii) ¿Cuál es el precio de una unidad de cada producto?

44. Un consumidor dispone de un presupuesto fijo para la compra de dos productos A y B. Una unidad del producto A cuesta \$ 25.

Con ese presupuesto puede comprar no más de 15 unidades de B.

Si compra 8 unidades de A y 10 unidades de B, gasta todo el presupuesto.

i) Determinar la ecuación presupuestaria y graficarla.

ii) ¿Cuál es el presupuesto del consumidor?

iii) ¿Cuánto cuesta una unidad del producto B?

iv) ¿Cuál es el máximo de unidades de A que puede comprar?

Ecuación presupuestaria – Recta balance – Plano balance

i) Supongamos que un consumidor recibe un ingreso fijo de \$1200 semanales y los utiliza en la compra de dos productos A y B.

Si 1 kilogramo de A cuesta \$ 20, 1 kilogramo de B cuesta \$ 30,

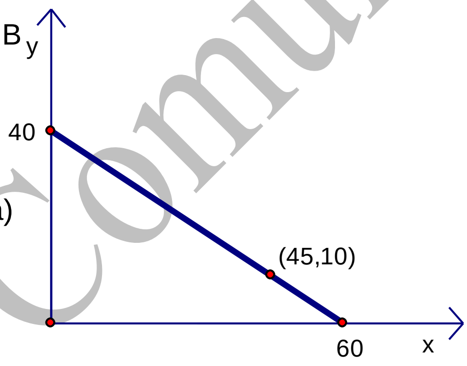
x es la cantidad de kilogramos de A , y es la cantidad de kilogramos de B, entonces

$$20x + 30y = 1200 \quad \text{donde} \quad x \geq 0,\ y \geq 0 .$$

Las soluciones de esta ecuación, llamada **ecuación presupuestaria** dan las posibles combinaciones de A y B que pueden ser compradas con \$ 1200.

La gráfica de esta ecuación es la **recta balance**.

Observar que (45,10) pertenece a la recta. Esto significa que si se compran 45 kg de A, entonces deben comprarse 10 kg de B para gastar en total \$ 1200.



Otras formas de la ecuación presupuestaria son:

$$\frac{20x}{1200} + \frac{30y}{1200} = 1 \quad ; \quad \frac{x}{60} + \frac{y}{40} = 1 \ \ \text{(ecuación segmentaria)}$$

Observar que

60 kg es la máxima cantidad que se puede comprar de A,

40 kg es la máxima cantidad que se puede comprar de B.

ii) Supongamos que un consumidor recibe un ingreso fijo de \$2400 semanales y los utiliza en la compra de tres productos A, B y C.

Si 1 kilogramo de A cuesta \$ 20, 1 kilogramo de B cuesta \$ 30, 1 kilogramo de C cuesta \$ 40,

x es la cantidad de kilogramos de A , y es la cantidad de kilogramos de B,

z es la cantidad de kilogramos de C, entonces

$$20x + 30y + 40z = 2400 \quad \text{donde} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 .$$

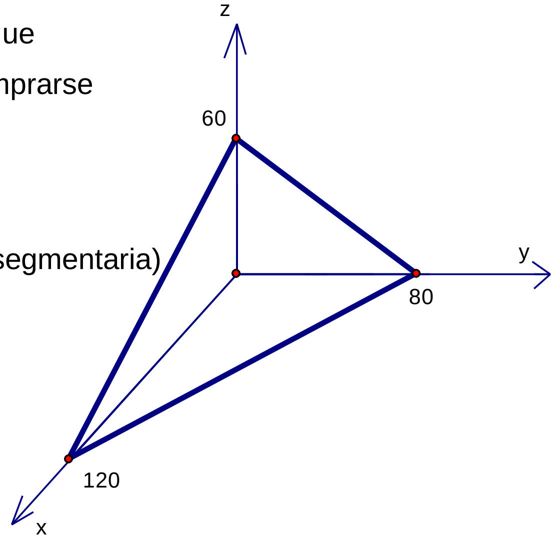
Las soluciones de esta ecuación, llamada **ecuación presupuestaria** dan las posibles combinaciones de A, B y C que pueden ser compradas con \$ 2400.

La gráfica de esta ecuación es el **plano balance**.

Observar que (60,20,15) pertenece al plano. Esto significa que si se compran 60 kg de A y 20 kg de B, entonces deben comprarse 15 kg de C para gastar en total \$ 2400.

Otras formas de la ecuación presupuestaria son:

$$\frac{20x}{2400} + \frac{30y}{2400} + \frac{40z}{2400} = 1 \ ; \ \frac{x}{120} + \frac{y}{80} + \frac{z}{60} = 1 \ \ \text{(ecuación segmentaria)}$$



Observar que

120 kg es la máxima cantidad que se puede comprar de A,

80 kg es la máxima cantidad que se puede comprar de B,

60 kg es la máxima cantidad que se puede comprar de C.