# PRÁCTICA 2

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**1.** Decidir cuáles de los puntos A,B,C,D, son solución del sistema *S* en cada caso

**a)** $S \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$

A = (0,0,0) B = (–2,1,2) C = (–1,2,3) D = $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$

**b)** $S \begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

A = (0,0,0,0) B = (2,1,4,3) C = (–2,5,–13,4) D = (1,1,1,–1)

**2.** Dar en forma paramétrica las soluciones de cada uno de los sistemas.

**a)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

**e)** $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

**3.** Aplicar el método de Gauss para llevar el sistema a la forma triangulada, y luego escribir las soluciones en forma paramétrica. Interpretar geométricamente.

**a)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

**4.** Para cada una de las siguientes matrices, encontrar una matriz triangulada por filas equivalente y determinar su rango.

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

**c)** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 11 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

**5.** Para cada uno de los siguientes sistemas:

**a)** aplicar el método de Gauss para triangularlo

**b)** hallar el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada

**c)** decidir si es: incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado

**d)** si es compatible, resolverlo.

*S1* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 = -1 \end{cases}$ *S2* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ 5x_1 - x_2 + 11x_3 = -3 \end{cases}$

*S3* $\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases}$ *S4* $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$S_5\begin{cases} \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_6\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S_7\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + \quad x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

**6.** Hallar las soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

que verifican la ecuación $x_2 = 0$.

**7.** Encontrar las coordenadas de todos los puntos de la recta de ecuación

$X = \alpha(2,2,-2)+(0,1,0)$ que son soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

**8.** Dadas las ecuaciones $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$

agregar una tercera ecuación de manera que el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas resultante tenga a (0,–2,1) como única solución.

**9.** Una compañía de enchapados para joyas de fantasía fabrica dos mezclas distintas, ambas a base de plata y oro.
La mezcla Premium lleva 7 g de polvo de oro por cada 3 g de polvo de plata.
La mezcla Standard lleva 4 g de polvo de oro por cada 6 g de polvo de plata.
La compañía posee en este momento un stock de 35 kg de polvo de oro y 30 kg de polvo de plata. ¿Cuántos kg de cada tipo de mezcla debe fabricar para agotar el stock?

**10.** Las harinas de soja, garbanzos y trigo burgul intervienen en la composición de tres alimentos: Soji, Garbi y Burgui, fabricados por una empresa.

En la siguiente tabla se detalla la composición de los mismos.

| | Soja | Garbanzos | Trigo burgul |
|---|---|---|---|
| Soji | 50 % | 30 % | 20 % |
| Garbi | 10 % | 50 % | 40 % |
| Burgui | 20 % | 20 % | 60 % |

La empresa pretende agotar los insumos que reciba.
La cantidad de toneladas de cada tipo de harina a recibir está entre una de las tres opciones siguientes:

| | *Opción I* | *Opción II* | *Opción III* |
|---|---|---|---|
| Soja | 2 | 4 | 6 |
| Garbanzos | 3 | 3 | 6 |
| Trigo burgul | 5 | 3 | 8 |

Determinar las cantidades de los tres alimentos que pueden producirse para cada opción de insumos recibidos.

**11.** Un turista que viajó a Europa visitó Berlín, Roma y Praga.
En Berlín gastó por día \$150 en hospedaje y \$ 100 en alimentos;
en Roma gastó por día \$100 en hospedaje y \$ 150 en alimentos;
en Praga gastó por día \$100 en hospedaje y \$ 100 en alimentos.
Por conceptos varios gastó \$ 50 por día en cada una de las tres ciudades.
A su regreso, el registro de gastos indicaba en total, \$ 1700 en hospedaje, \$ 1600 en alimentos y \$ 700 en gastos varios.
Calcular cuántos días estuvo el turista en cada una de las tres ciudades, o bien mostrar que el registro es incorrecto.

**12.** Para cada ítem, dar todas las posibilidades, teniendo en cuenta que las soluciones deben ser números enteros no negativos.

**i)** Una compañía de detergentes fabrica los productos: LAV, BRI, CIC y PRO a partir de tres sustancias AS, SP y TS.
La tabla siguiente muestra, en cientos de kg, las cantidades de materia prima necesarias para fabricar un envase de cada producto y el stock.

| | *LAV* | *BRI* | *CIC* | *PRO* | *stock* |
|---|---|---|---|---|---|
| AS | 4 | 8 | 4 | 4 | 60 |
| SP | 2 | 5 | 2 | 3 | 36 |
| TS | 3 | 7 | 4 | 3 | 50 |

Encontrar el número de envases de cada producto que se puede fabricar utilizando todo el material disponible.

**ii)** Una empresa tiene tres máquinas para fabricar cuatro productos diferentes.
Para producir una unidad del producto A se requieren 1h de la máquina I, 2h de la máquina II y 1h de la máquina III.
Para producir una unidad del producto B se requieren 2h de la máquina I y 2h de la máquina III.
Para producir una unidad del producto C se requieren 1h de la máquina I, 1h de la máquina II y 3h de la máquina III.
Para producir una unidad del producto D se requieren 2h de la máquina I y 1h de la máquina II.
Determinar cuántas unidades se deben fabricar de cada producto en un día de 8 horas, suponiendo que cada máquina se utiliza 8 horas completas.

**iii)** Una compañía de transportes posee tres tipos distintos de camiones, que están equipados para el transporte de dos clases de maquinaria pesada.
Los camiones de tipo A pueden transportar 2 máquinas de la clase I.
Los de tipo B pueden transportar 1 máquina de cada clase.
Los de tipo C pueden transportar 1 máquina de la clase I y 2 de la clase II.
La empresa debe transportar 32 máquinas de la clase I y 10 máquinas de la clase II.
Determinar cuántos camiones de cada tipo se requieren para transportar todo el pedido, suponiendo que cada camión debe ir con la carga completa.

**13.** Una empresa prepara tres clases de alimentos para perros A, B y C.
Dispone de 660 kg de hueso molido, 680 kg de carne disecada y 760 kg de salvado de cereal.

Para preparar 100 kg de alimento A utiliza 40 kg de hueso molido, 30 kg de carne disecada y 30 kg de salvado de cereal.

Para preparar 100 kg de alimento B utiliza 40 kg de hueso molido, 50 kg de carne disecada y el resto de salvado de cereal.

Para preparar 100 kg de alimento C utiliza 20 kg de hueso molido, 20 kg de carne disecada y el resto de salvado de cereal.

¿Cuántos kg de cada alimento debe preparar para agotar el stock de materia prima?

**14.** Determinar todos los valores de $k$ que hacen que el sistema sea: incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado.

**a)** $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = k \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 10x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = -7 \\ x_1 + kx_3 = 1 \end{cases}$

**15.** Determinar los valores de k para los cuales el rango de la matriz ampliada del sistema $S$ es igual al rango de la matriz del sistema homogéneo asociado.

$$S \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + kx_3 = 4 \end{cases}$$

**16.** Determinar el valor de $k$ para que el sistema tenga infinitas soluciones. Para el valor hallado, resolver el sistema.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 + kx_3 = 4 \end{cases}$$

**17.** Encontrar, en cada caso, todos los valores de $a$ y $b$ para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es M, resulta compatible.

**a)** $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix}$

**b)** $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & \vdots & b \\ 0 & a^2-9 & a-3 & \vdots & a+b \end{pmatrix}$

**18.** Se sabe que (1,2,–1) es una solución del sistema

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - bx_3 = 1 \\ x_1 - ax_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$ . Encontrar todas las soluciones del sistema.

**19.** Determinar todos los valores de a y b para que el sistema cuya matriz

ampliada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \vdots & a \\ 1 & 1 & -3 & 1 & \vdots & b \end{pmatrix}$ tenga solución.

**20.** Encontrar todos los puntos (a,b,c) de la recta L : X = λ(1,1,1) + (0,1,2)

para los cuales el sistema $S \begin{cases} 3x + 2y - z = a \\ x - y + z = b \\ 2x + 3y - 2z = c \end{cases}$ tiene solución.

**21.** Decidir para qué valores de $\alpha$ el sistema $S$ tiene solución única,
para qué valores de $\alpha$ tiene infinitas soluciones y
para qué valores de $\alpha$ no tiene solución.
Resolver el sistema para algún valor de $\alpha$ para el cual el sistema admita infinitas soluciones.

$$S \begin{cases} 2x + 3\alpha y - 3z = x - 2 \\ x + y + (\alpha + 1)z = y - 1 \\ x + 3y + z = z - 1{,}5 \end{cases}$$

**22.** Hallar todos los valores de a y b tales que los sistemas $S_1$ y $S_2$ tienen exactamente una solución en común.

$$S_1 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - ax_3 = 2 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + a^2x_2 + 2x_3 = b \end{cases}$$