PRÁCTICA 3
ESPACIOS VECTORIALES

Definición 1: Un **espacio vectorial real** es un conjunto **V** cuyos elementos se llaman vectores, provisto de dos operaciones: suma (+) y producto por escalares (.).

La suma, que a cada par de vectores (**v**, **w**) de **V** le asigna el vector **v** + **w** de **V** y el producto por escalares, que a un número real λ y un vector **v** de **V** le asigna un vector λ.**v** de **V,** verifican las siguientes propiedades:

i) (**v** + **w**) + **s** = **v** + (**w** + **s**) (asociatividad)
ii) **v** + **w** = **w** + **v** (conmutatividad)
iii) **0** + **v** = **v** + **0** = **v** para todo **v**∈**V** (existencia de elemento neutro)
iv) para todo **v**∈**V** existe otro vector al que llamaremos **–v**, que verifica
v + (**–v**) = (**–v**) + **v** = **0** (existencia de inverso aditivo)
v) para todo **v**∈**V,** 1.**v** = **v**
vi) si λ∈**R,** **v**∈**V** y **w**∈**V**, λ.(**v** + **w**) = λ.**v** + λ.**w**
(distributividad del producto por escalares respecto a la suma de **V**)
vii) si λ∈**R,** μ∈**R** y **v**∈**V**, (λ + μ).**v** = λ.**v** + μ.**v**
(distributividad del producto por escalares respecto a la suma de **R**)
viii) si λ∈**R,** μ∈**R** y **v**∈**V**, (λ. μ).**v** = λ.(μ.**v**)

SUBESPACIOS - GENERADORES

Definición 2: Un subconjunto S de un espacio vectorial es un **subespacio** si:

i) **0**∈S
ii) Si **v** y **w** son dos vectores de S, la suma **v** + **w** ∈ S
iii) Si **v**∈S y λ es cualquier escalar en **R**, el producto λ.**v**∈S.

Definición 3: Si **V** es un espacio vectorial real y $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$ son vectores de **V,** un vector **v** de **V** que se escribe en la forma $\mathbf{v} = \lambda_1.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_r.\mathbf{v_r}$ para algún conjunto de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ en **R**, es una **combinación lineal de** $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$ es un subespacio de **V.** Se llama el **subespacio generado** por $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$ y se nota $< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r} >$.

Definición 4: En un espacio vectorial **V,** un conjunto C = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ es un **sistema de generadores de V** si todo vector de **V** es combinación lineal de los vectores de C.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL – BASES

Definición 5: Un conjunto C = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ de vectores de un espacio vectorial se llama **linealmente dependiente** si existe un conjunto de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ en **R**, no todos nulos tales que $\lambda_1.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_r.\mathbf{v_r} = \mathbf{0}$.
En caso contrario, el conjunto se dice **linealmente independiente**, es decir, un conjunto C = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ es linealmente independiente si una combinación lineal de ellos da cero solamente si los escalares son todos cero ($\lambda_1.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_r.\mathbf{v_r} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$).

Definición 6: Un conjunto C = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ de vectores de un espacio vectorial **V** es una **base de V** si es un conjunto de generadores linealmente independiente.
Propiedad: Dos bases distintas de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

Definición 7: El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial es la **dimensión** del espacio vectorial.

En $\mathbf{R^n}$ el conjunto de n-uplas (1,0, … ,0); (0,1,0, … ,0); … (0,0, … ,0,1) es una base, se llama **base canónica de** $\mathbf{R^n}$.

1. Determinar si es posible escribir el vector **v** = (2,3,–4) como combinación lineal de los vectores dados:

a) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) **b)** (1,–3,2), (3,0,–2)

c) (2,1,0), (–1,3,2) **d)** (1,–1,1), (6,9,–12)

2. Hallar el valor de k para que el vector (1,5,k) sea combinación lineal de los vectores (1,–1,0) y (1,2,–3).

3. Describir geométricamente el subespacio S y decidir en cada caso si los vectores **v** y **w** pertenecen a S**.**

a) $S = \langle (3,2) \rangle$ $\mathbf{v} = (1, \frac{2}{3})$ $\mathbf{w} = (6,-1)$

b) $S = \langle (1,-2,3) \rangle$ $\mathbf{v} = (\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{3}{5})$ $\mathbf{w} = (1,2,-3)$

c) $S = \langle (1,2,3), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) \rangle$ $\mathbf{v} = (-2,-4,-6)$ $\mathbf{w} = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2})$

d) $S = \langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$ $\mathbf{v} = (0,0,2)$ $\mathbf{w} = (3,1,2)$

e) $S = \langle (1,-1,2), (2,1,0) \rangle$ $\mathbf{v} = (-1,0,2)$ $\mathbf{w} = (3,0,2)$

4. Si $\mathbf{u} = (1,2,-1)$, $\mathbf{v} = (-3,0,4)$ y $S = \langle (-1,0,1), (0,2,-1) \rangle$, decidir si el vector $2\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$.

5. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbf{R}$ para que $(10,-5,\alpha)$ no pertenezca al subespacio $\langle (1,-1,-1), (2,-1,-3) \rangle$.

6. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbf{R}^n$:

a) n = 2 $\{(3,-2), (2,1)\}$

b) n = 2 $\{(3,1), (-9,-3)\}$

c) n = 3 $\{(1,-1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

d) n = 3 $\{(1,-1,1), (0,1,1), (2,1,5)\}$

e) n = 3 $\{(1,-1,1), (0,1,1), (0,0,1), (1,2,1)\}$

7. Determinar el valor de a para que el vector (1,–1,2) pertenezca al subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + ax_2 - x_3 = 0\}$.

8. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son o no linealmente independientes.

a) $\{(2,-1), (-3,2)\}$

b) $\{(2,-3), (-4,6)\}$

c) $\{(1,1,2), (1,0,-1), (1,0,1)\}$

d) $\{(1,-1,2), (1,2,-1), (0,1,-1)\}$

9. Hallar todos los $k \in \mathbf{R}$ para los cuales:

a) (1,1,–1), (3,2,0), (4,1,k) son linealmente independientes

b) (4,1, k) es combinación lineal de (1,1,–1) y (3,2,0).

10. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones de vectores son base de $\mathbf{R}^3$. Justificar.

a) (1,1,0), (0,1,1)

b) (1,1,0), (0,1,1), (0,0,0)

c) (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)

d) (1,1,0), (0,1,1), (0,–1,–1)

e) (1,2,3), (0,0,1), (1,1,1)

f) (1,0,1), (1,2,3), (0,0,1), (1,–2,1)

11. Hallar base y dimensión de los siguientes subespacios

a) $S = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,/\, \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + \quad\; x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad = 0 \end{cases} \right\}$

b) $S = \{x \in \mathbf{R}^3 \,/\, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

c) $S = \{x \in \mathbf{R}^4 \,/\, x_1 + 3x_2 - x_4 = 0\}$

d) $S = \langle (3,1,-2), (-2,1,1) \rangle$

e) $S = \left\{ x \in \mathbf{R^4} \ / \ \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

f) $S = \langle (1,2,1,-1), (2,1,3,0), (3,3,4,-1) \rangle$

12. Hallar dos bases distintas de cada subespacio S

a) $S = \{x \in \mathbf{R^3} \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ \ x_1 + x_3 = 0\}$

b) $S = \{x \in \mathbf{R^4} \ / \ x_1 + x_3 = 0, \ \ x_2 + x_3 = 0\}$

c) $S = \langle (1,-1,1), (2,2,-4), (2,0,-1) \rangle$

d) $S = \langle (-1,3,0), (2,4,1) \rangle$

13. Decidir en cada caso si B es base del subespacio S

a) $B = \{(1,-1,2), (0,1,-3)\}$ $\quad S = \{x \in \mathbf{R^3} \ / \ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$

b) $B = \{(0,1,1), (1,1,0)\}$ $\quad S = \langle (1,3,2), (1,2,1), (1,6,5) \rangle$

c) $B = \{(2,1,1), (-1,1,0)\}$ $\quad S = \langle (2,1,1), (1,1,1) \rangle$

d) $B = \{(2,1,1), (3,2,2)\}$ $\quad S = \langle (2,1,1), (1,1,1) \rangle$

14. a) Dado el subespacio $S = \{x \in \mathbf{R^4} \ / \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$, hallar una base de S que contenga al vector (0,3,1,0).

b) Dado el subespacio $S = \{x \in \mathbf{R^3} \ / \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$, encontrar dos bases distintas de S, tales que una de ellas contenga al vector **v** = (4,2,–1) y la otra contenga al vector **w** = (3,–1,–2).

15. Hallar $a \in \mathbf{R}$ para que el vector (1,a,4) pertenezca al subespacio $S = \langle (1,0,2), (2,-1,3) \rangle$.

16. Dados los cinco vectores (1,–1,2), (2,1,1), (1,2,–1), (1,2,1) y (1,2,0) hallar dos bases distintas de $\mathbf{R^3}$ formadas con los vectores dados.

17. Determinar a y b para que B = $\{(1,1,0), (0,3,2)\}$ sea una base del subespacio $S = \{x \in \mathbf{R^3} \;/\; x_1 + ax_2 - bx_3 = 0\}$.

18. Dado el subespacio $S = \{x \in \mathbf{R^3} \;/\; x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, encontrar un vector $\mathbf{v} \in S$ tal que $\{(1,-1,2), (2,2,1), \mathbf{v}\}$ sea linealmente independiente.

19. Si $S = \{x \in \mathbf{R^3} \;/\; x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, encontrar $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que $\mathbf{v} \in \langle (1,3,1), (0,2,1) \rangle$.

20. Determinar una base y la dimensión del subespacio

$S = \langle (1,0,0,-1), (1,0,0,1), (3,2,0,-3), (2,0,0,-2) \rangle$.

Encontrar un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R^4}$ que no pertenezca a S.

21. Extender, si es posible, estas sucesiones de vectores a una base de $\mathbf{R^3}$

a) $(1,-1,2)$ **b)** $(2,1,0), (1,0,-3)$ **c)** $(1,-1,3), (-2,2,-6)$

22. Sean el subespacio $S = \left\{ x \in \mathbf{R^4} \;/\; \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$,

y el vector $\mathbf{v} = (1,2,1,1)$. Hallar una base B de S tal que $\mathbf{v} \in B$ y escribir el vector $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los vectores de B.

23. Si $S = \langle (3,1,-1,0), (1,2,1,-3), (1,-3,-3,6) \rangle$ y $T = \{x \in \mathbf{R^4} \;/\; x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

a) decidir si $S \subset T$ **b)** determinar la dimensión de S

c) decidir si es posible extender una base de S a una base de T; en caso afirmativo, hacerlo.

24. Sea $S = \{x \in \mathbf{R^5} \;/\; x_1 - 2x_3 + x_5 = 0\}$. Determinar todos los valores de α y β en **R** de modo que los vectores $\mathbf{v_1} = (1,0,1,-3,1)$, $\mathbf{v_2} = (0,-1,1,0,2)$ y $\mathbf{v_3} = (-3,\alpha,\beta,9,-1)$ formen parte de una base del subespacio S.