PRÁCTICA 6
ALGORITMO SIMPLEX

1. a) Plantear el sistema de ecuaciones y confeccionar la tabla simplex inicial asociados a cada uno de los siguientes problemas lineales.

b) Resolverlos e indicar en la tabla simplex correspondiente a cada paso las variables básicas y no básicas, la solución factible básica y el valor de z en esa solución.

i) Maximizar $z = -3x_1 + 4x_2$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ii) Maximizar $z = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 19 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

iii) Maximizar $z = -2x_2 + 4x_3$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} -3x_1 + 6x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

iv) Maximizar $z = -x_1 + x_2 - 6x_3$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

v) Maximizar $z = 6x_1 - 7x_2 - 14x_3$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 7 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

vi) Maximizar $z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3$

$$\text{sujeta a} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Para cada una de las siguientes tablas simplex, determinar las variables básicas y no básicas, la solución factible básica y el valor de z correspondiente a dicha solución. Indicar también si la tabla es final o no.

a)

1	1	1	0	3
0	–1	–2	1	4
0	3	–5	0	z–15

b)

1	0	–1	1	0	10
0	1	2	–2	1	20
0	0	–9	6	–4	z–100

c)

2	0	1	1	0	0	3
1/2	0	–3/2	0	1	–1/2	3/2
–1/2	1	1/2	0	0	1/2	½
–3	0	1	0	0	–2	z–2

d)

1	0	1	1	0	0	1
3	0	0	1	1	1	7
2	1	0	1	0	1	5
–10	0	0	–4	0	–10	z–44

3. Maximizar $z = 2x_1 + x_2$ sujeta a $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

a) Aplicar el método simplex y analizar la tabla obtenida después de pivotear una vez. ¿Se puede seguir pivoteando?

b) Resolver por el método gráfico. Obtener conclusiones.

4. La siguiente es la tabla simplex inicial de un problema estándar de maximización. Hallar el valor máximo de z y decir en qué punto se alcanza.

1	5	–2	1	0	0	60
2	2	1	0	1	0	30
0	1	2	0	0	1	10
2	6	–4	0	0	0	z

5. Para la siguiente tabla simplex correspondiente a un problema estándar de maximización, encontrar la tabla final y decir cuál es el valor máximo de z y en qué punto lo alcanza.

0	0,5	0	1	–0,5	0	2
1	0,5	1	0	0,5	0	13
2	0,5	0	0	–1,5	1	4
1	–3	0	0	–1	0	z–26

6. Dada la tabla simplex correspondiente a un problema estándar de maximización, encontrar α para que el valor máximo de z sea $\frac{15}{2}$.

0	–1	2	1	–1	3
1	1	–1	0	1	3
0	–7	1	0	–2	$z-\alpha$

7. Un estudiante que se prepara intensivamente en inglés, francés y portugués, asistirá a un laboratorio de idiomas.
En total dispone de a lo sumo 94 horas.

La cantidad de tiempo que dedica al idioma inglés no puede superar en más de 10 horas al doble de la cantidad de tiempo que dedica al idioma francés. El tiempo que dedica al francés y al portugués en conjunto, no puede superar en más de 34 horas al tiempo que dedica al inglés.
Si debe abonar \$7 la hora de inglés, \$ 3 la de francés y \$ 6 la de portugués,¿cuál es el máximo gasto que le puede ocasionar el laboratorio de idiomas?

8. Maximizar f = 2x+ 4y sujeta a $\begin{cases} x+2y\le 6 \\ -x+\ \ y\le 2 \\ x-\ \ y\le 3 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$

a) Resolver por el método simplex

b) Resolver por el método gráfico

c) ¿Cuántas de las variables tienen indicador cero en la tabla final del algoritmo simplex? ¿Son básicas todas estas variables?

9. Una empresa agroquímica produce fertilizantes.
El fertilizante Especial contiene 20 % de potasio, 30 % de fosfatos y 50 % de nitratos. El fertilizante Super contiene 40 % de potasio, 20 % de fosfatos y 40 % de nitratos. El fertilizante Común contiene 30 % de potasio, 30 % de fosfatos y 40 % de nitratos. La empresa posee en stock 60 toneladas de potasio, 80 toneladas de fosfatos y 90 toneladas de nitratos. Si una tonelada del fertilizante Especial se vende a \$ 170, una del Super a \$ 160 y una del Común a \$ 150, ¿cuántas toneladas de cada fertilizante debe producir la empresa con la materia prima disponible para maximizar sus ingresos por la venta? ¿Es única la solución?

10. Hallar la solución factible que produce el mayor valor de

$z = -7x_1 + 6x_2 - 14x_3$ sujeta a $\begin{cases} 5x_1-3x_2+\ \ x_3\le 12 \\ -3x_1-3x_2-6x_3\le\ 2 \\ 2x_1+\ \ x_2+4x_3\le 17 \\ x_1\ge 4,\ x_2\ge 4,\ x_3\ge 0 \end{cases}$.

Sugerencia: hacer el cambio de variables $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2 - 4$.

11. Resolver los siguientes problemas lineales, convirtiéndolos previamente en problemas estándar de maximización.

En los ejemplos de $\mathbf{R^2}$ dibujar las regiones de factibilidad e identificar los vértices correspondientes a la solución.

a) Minimizar f = x – 2y

$$\text{sujeta a } \begin{cases} x+y \le 4 \\ -x+y \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Minimizar f = x – 4y

$$\text{sujeta a } \begin{cases} -x+2y \le 4 \\ x+\ \ y \le 5 \\ y \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

c) Minimizar f = –4x + 6y + 2z sujeta a

$$\begin{cases} 3x-7y+2z \le 9 \\ x-2y+\ \ z \le 2 \\ -2x+5y+3z \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{cases}$$

d) Minimizar f = 2x – 5y – z sujeta a

$$\begin{cases} x \qquad +3z \le 6 \\ x+y-\ \ z \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{cases}$$

e) Minimizar $f = 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4$ sujeta a

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 - x_4 \le 1 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

12. El problema “Maximizar $z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-3x_3 \le 12 \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3 \le\ \ 4 \\ 2x_1+2x_2-2x_3 \le\ \ 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \text{”,}$$

tiene la siguiente tabla simplex final

0,5	0	–3,5	1	– 0,5	0	10
1,5	1	0,5	0	0,5	0	2
–1	0	–3	0	–1	1	4
–12,5	0	–2,5	0	–7,5	0	z–30

Plantear el problema dual y dar la solución.

13. En cada caso plantear el problema dual y hallar la solución.

a) Maximizar $z = -7x_1 + 4x_2 - 2x_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $z = 4x_1 - 6x_2 - 2x_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 6x_1 - 14x_2 + 4x_3 \le 18 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \le 4 \\ -4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

c) Maximizar $z = 4x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

d) Maximizar $z = 4x + 5y$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} x \le 1 \\ x - y \le 1 \\ 2y \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

14. Resolver:

a) Minimizar $u = 14\,w_1 + 16\,w_2$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 2w_1 + 3w_2 \ge 5 \\ 4w_1 + 6w_2 \ge 8 \\ w_1 + w_2 \ge 2 \\ w_1 \ge 0, w_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) Minimizar $u = 3\,w_1 + 6\,w_2 + 21\,w_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 6w_1 - 3w_2 - 7w_3 \ge -3 \\ -3w_1 + 3w_2 + 6w_3 \ge 9 \\ -3w_1 + 6w_2 + 8w_3 \ge -1 \\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \ge 0 \end{cases}$$

c) Minimizar $u = 18\,w_1 + 4\,w_2 + 2\,w_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 6w_1 + 2w_2 - 4w_3 \ge 4 \\ -14w_1 - 4w_2 + 10w_3 \ge -6 \\ 4w_1 - 2w_2 + 6w_3 \ge -2 \\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \ge 0 \end{cases}$$

d) Minimizar $u = 6\,w_1 + 24\,w_2 + 14\,w_3$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} -w_1 + 2w_2 \ge -2 \\ w_1 + 2w_2 + w_3 \ge 3 \\ w_1 + w_2 + 3w_3 \ge -1 \\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \ge 0 \end{cases}$$

15. La siguiente es la tabla simplex inicial de un problema estándar de maximización. Hallar la solución del problema dual de minimización.

1	0	2	1	0	0	2
1	3	2	0	1	0	8
–1	4	1	0	0	1	7
3	1	–1	0	0	0	Z

16. Para la siguiente tabla simplex correspondiente a un problema estándar de maximización, hallar la solución del problema dual asociado.

1	0	–12	1	0	–5	1
2	0	– 3	0	1	–2	1
0	1	2	0	0	1	1
1	0	–16	0	0	–6	z–6

17. Un joven quiere elaborar un programa semanal de ejercicios que incluirá trote, ciclismo y natación. Planea dedicar al ciclismo por lo menos el mismo tiempo que le dedicará al trote y a la natación en conjunto.
Quiere nadar al menos 2 horas por semana.
En el trote consume 600 calorías por hora, en el ciclismo 300 calorías por hora y en la natación 300 calorías por hora.
Si desea quemar en total al menos 3000 calorías semanales debido al ejercicio, determinar cuántas horas semanales deberá dedicar a cada tipo de ejercicio para alcanzar sus objetivos en el menor tiempo posible.

18. En el sector de producción de una fábrica, los empleados de categoría A cobran $ 8 la hora y los de categoría B cobran $ 5 la hora. En la sección embalaje, los empleados cobran $ 6 la hora y los aprendices $ 3 la hora. La fábrica necesita al menos 120 personas en producción y 60 personas en embalaje. Además debe contratar al menos el doble de empleados de categoría A que de B. También debe contratar, en la sección embalaje, al menos el doble de empleados que de aprendices.
¿Cuántos empleados de cada clase debe contratar para que el total que paga por hora en concepto de salarios sea mínimo? ¿Cuál es ese total?

19. Tres alimentos contienen sólo carbohidratos y proteínas.
El alimento I cuesta $ 5 el kilo y el 90 % de su peso son carbohidratos.
El alimento II cuesta $ 10 el kilo y el 60 % de su peso son carbohidratos.
El alimento III cuesta $ 20 el kilo y el 70 % de su peso son proteínas.
¿Qué combinación de estos tres alimentos proporcionará al menos 2 kilos de carbohidratos y 1 kilo de proteínas a un costo mínimo?
¿Cuál es ese costo?