Práctica 0: Preliminares

Ejercicio 1. Calcular.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ *b*) $\frac{5}{2} - 4$ *c*) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{2} : \frac{6}{7}$ *e*) $\dfrac{3}{\frac{4}{5}}$ *f*) $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$

g) -2^4 *h*) $(-2)^4$ *i*) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

j) $\frac{3}{2^{-1}}$ *k*) $(-3)^{-2}$ *l*) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

m) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$ *n*) $(5+3)^2$ *ñ*) $5^2 + 3^2$

o) $\sqrt{6^2}$ *p*) $\sqrt{(-6)^2}$ *q*) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

r) $\sqrt{9+16}$ *s*) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$ *t*) $\sqrt{(-9) \cdot (-16)}$

Ejercicio 2. Resolver.

a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)$ *b*) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{6}$

c) $\dfrac{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{9}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)^2}$ *d*) $\left[\dfrac{9\left(\frac{2}{27} + \frac{1}{81}\right) + 1}{\left(-\frac{8}{9}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}$

Ejercicio 3. Aplicando las propiedades de la potenciación, escribir las siguientes expresiones como una potencia de a.

a) $\dfrac{a^2 \cdot a^5 \cdot a^{-4}}{a^3 \cdot a \cdot a^{-2}}$ *b*) $\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^4}\right)^{-\frac{5}{6}}$ *c*) $\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}\right)^{12}$

Ejercicio 4. Desarrollar las siguientes expresiones.

a) $(x-5)^2$

b) $x(x+7)^2$

c) $4(x-3)(x+1)$

d) $(x-y)(x+y)$

Ejercicio 5. Escribir cada expresión como producto de dos factores.

a) x^2-81

b) x^3-11x

c) $x^2-10x+25$

d) $4x^2-9$

e) x^4-36

f) $x^4+3x^3+5x^2$

Ejercicio 6. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2x+5=9$

b) $5-3(x+1)=3$

c) $3-\dfrac{x}{2}=-5x+7$

d) $5x+2=x+3-(1-4x)$

e) $3+x=x-2$

f) $\dfrac{3x-7}{x+6}=-2$

g) $\dfrac{3x-2}{7x}=0$

h) $\dfrac{5}{x}+2=3$

i) $\dfrac{2}{2x-1}=-\dfrac{2}{5x+3}$

j) $\dfrac{12x^2-4}{4x-1}=3x$

k) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$

l) $\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{1}{\dfrac{2x+4}{x}}=\dfrac{-3}{3x+6}$

Práctica 1: Números reales

Ejercicio 1. Representar en la recta real los siguientes números.

$$0\ ,\ 1\ ,\ -3\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{7}{3}\ ,\ -\sqrt{3}.$$

Ejercicio 2. Representar en la recta real los siguientes conjuntos.

a) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 4\}$

d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 4\right\}$

Ejercicio 3. Escribir los siguientes conjuntos como un intervalo.

a) Todos los números reales menores que -3.

b) Todos los números mayores o iguales que 2.

c) Todos los números reales mayores que 2 y menores o iguales que $\frac{9}{2}$.

d) $(-3,1) \cup (0,4]$

e) $(-3,1) \cap (0,4]$

f) $[-2,-1) \cup [-1,+\infty)$

g) $(-\infty,3) \cap (-\infty,3]$

h) $[2,3] \cup (0,5)$

i) $[2,3] \cap (0,5)$

Ejercicio 4. Escribir los siguientes conjuntos como intervalo o unión de intervalos.

a) $\{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x \leq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 3x + 2 < 8\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ó } x \geq 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : (2x-1)(x+3) < 0\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} : x(x+4) \geq 0\}$

g) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x} > 0\right\}$

h) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3x-5}{x+3} \leq 0\right\}$

i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4-2x}{x+1} < 0\right\}$

j) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{x} \geq 4\right\}$

k) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < \frac{3}{x}\right\}$

l) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{6}{x-4} < 2\right\}$

m) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+2} \geq 4\right\}$

n) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3x+2}{x+4} > 1\right\}$

Ejercicio 5. Hallar, en cada caso, todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que:

a) $|x| = 5$

b) $|2x+1| = 0$

c) $|x-3| = -1$

d) $|3x-2| = 7$

e) $|2x-3| = x$

f) $|2x-5| = |x+1|$

Ejercicio 6. Escribir los siguientes conjuntos como intervalo o unión de intervalos.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| \geq 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-1| > 8\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : |8x+3| \leq 5\}$

Ejercicio 7. Expresar los siguientes conjuntos en la forma

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} \quad \text{ó bien} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x-a| > r\}$$

según corresponda, para valores de $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ adecuados.

a) Los números reales que distan de 0 en menos de 2.

b) Los números reales que distan de 1 en más que 3.

c) Los números reales que distan de $-\frac{1}{2}$ en menos de 7.

d) El intervalo $(-5, 3)$.

e) La unión de intervalos $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

Ejercicio 8. Para cada uno de los siguientes conjuntos:

- Decidir si 5 es una cota superior.
- Decidir cuáles están acotados superiormente.
- Encontrar, si existe, el supremo.

a) $[0, 7)$

b) $(-\infty, 4]$

c) $(1, 2) \cup (3, 5]$

d) $[-1,2) \cap [1,+\infty]$

e) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

f) $\{1{,}9\ ;\ 1{,}99\ ;\ 1{,}999\ ;\ldots\}$

Ejercicio 9. Para los conjuntos del ejercicio anterior:

- Decidir si 0 es una cota inferior.
- Decidir cuáles están acotados inferiormente.
- Encontrar, si existe, el ínfimo.

Ejercicio 10. Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |2x-1| < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |3x+5| \geq 9\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x} < \dfrac{2x+1}{3x}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2+4}{x+2} \geq x\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x}{2x+3} \leq \dfrac{1}{2}\right\}$

f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{3}{2x} > 1\right\}$

Ejercicio 11. Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x(7-2x) \leq 0\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 3\}.$$

Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de $A \cup B$ y de $A \cap B$.

Ejercicio 12. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

i) El conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{10}{x} - 2 \leq 0\right\}$ es igual a

$\boxed{a}$ $(-\infty,0)$

$\boxed{b}$ $[5,+\infty)$

$\boxed{c}$ $(0,5]$

$\boxed{d}$ $(-\infty,0) \cup [5,+\infty)$

ii) Si $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\dfrac{x+1}{2}\right| \leq 2\right\}$, entonces

$\boxed{a}$ $\sup(A) = 1$ e $\inf(A) = -3$

$\boxed{b}$ $\sup(A) = 3$ e $\inf(A) = -5$

$\boxed{c}$ $\sup(A) = 3$ y A no tiene ínfimo

$\boxed{d}$ $\sup(A) = 1$ y A no tiene ínfimo

iii) Una cota inferior del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 5x+1 \geq 2x-1\}$ es

$\boxed{a}$ 1

$\boxed{b}$ $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{c}$ $-\dfrac{5}{3}$

$\boxed{d}$ 0

iv) Sea $A = (3,5) \cup (5,+\infty)$. Entonces

$\boxed{a}$ A no tiene supremo y el ínfimo de A es 3

$\boxed{b}$ A no tiene supremo y el ínfimo de A es 5

$\boxed{c}$ el supremo de A es 5 y el ínfimo de A es 3

$\boxed{d}$ A no tiene ni supremo ni ínfimo

v) Sean $r > 0$ y $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| < r\}$. Si $\sup(A) = 1$, entonces

$\boxed{a}$ $r = 1$ e $\inf(A) = -2$

$\boxed{b}$ $r = 5$ e $\inf(A) = -4$

$\boxed{c}$ $r = 1$ y A no tiene ínfimo

$\boxed{d}$ $r = 5$ y A no tiene ínfimo

vi) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : (3-x)(x+1) > 3\}$ es igual a

$\boxed{a}$ $(0,2)$

$\boxed{b}$ $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

$\boxed{c}$ $(-1,3)$

$\boxed{d}$ $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

Práctica 2: Funciones

Ejercicio 1. Representar en el plano los siguientes puntos.

$A = (2,0)$ $B = (0,-2)$ $C = \left(3, \dfrac{1}{2}\right)$

$D = (-4,1)$ $E = (3,-3)$ $F = (-\sqrt{2},-1)$

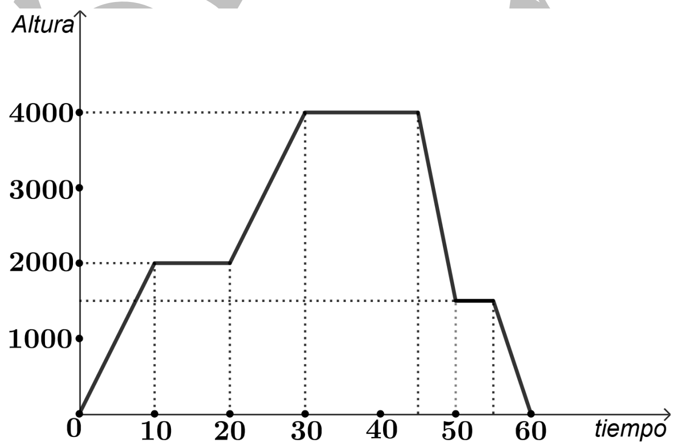
Ejercicio 2. Representar en el plano todos los puntos que tienen:

a) abscisa igual a -3.

b) ordenada igual a 2.

c) abscisa y ordenada iguales.

Ejercicio 3. El vuelo desde el Aeroparque Jorge Newbery en CABA hasta el Aeropuerto Comandante Espora en Bahía Blanca tiene una duración de 60 minutos. El siguiente gráfico describe la altura de un avión (en metros) en función del tiempo (en minutos) durante dicho viaje:



a) ¿Cuál es el dominio de la función ? ¿Y la imagen ?

b) ¿A qué altura se encontraba el avión a los 15 minutos de despegar ?

c) ¿Cuántas veces estuvo a 3000 metros de altura ?

d) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada ? ¿Cuánto tiempo voló a esa altura ?

e) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la altura máxima ?

f) ¿En qué momentos ascendió ? ¿En qué momentos descendió ? ¿En qué momentos voló a altura constante ?

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.

a) Completar la siguiente tabla de valores.

x	3	0	-2	$\frac{1}{2}$
$f(x)$				

b) Trazar el gráfico de f.

c) Hallar el punto en donde el gráfico de f corta al eje x.

Ejercicio 5. Hallar, en cada caso, la función lineal f que satisface:

a) $f(0) = 6$, $f(-3) = 0$

b) $f(4) = -1$, $f(3) = -\dfrac{3}{2}$

c) $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1$, $f(-1) = 5$

d) $f(\sqrt{3}) = 4$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$

Ejercicio 6.

a) ¿Existe una función lineal f que corresponda a la siguiente tabla de valores ?

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

b) Completar la siguiente tabla de valores sabiendo que f es una función lineal.

x	-1	$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	

Ejercicio 7. Dar una ecuación cartesiana para cada una de las siguientes rectas y graficarlas.

a) La recta de pendiente 2 que pasa por el punto $(1, -1)$.

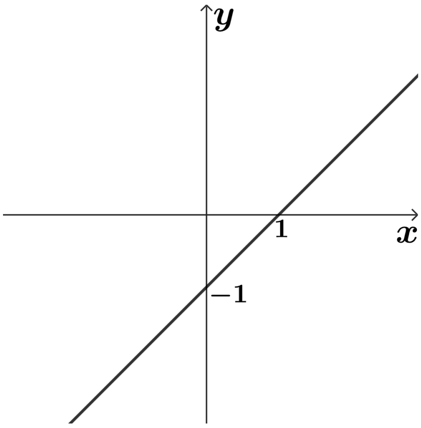
b) La recta de pendiente $-\dfrac{1}{2}$ que pasa por el punto $(4, 3)$.

c) La recta de pendiente nula que pasa por el punto $(2, 1)$.

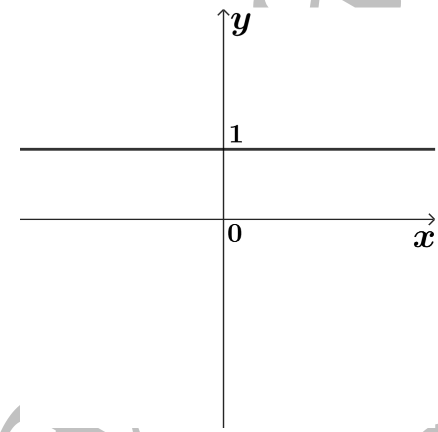
d) La recta vertical que pasa por el punto $(-3, 0)$.

Ejercicio 8. Hallar, en cada caso, la fórmula de la función lineal correspondiente a cada recta.

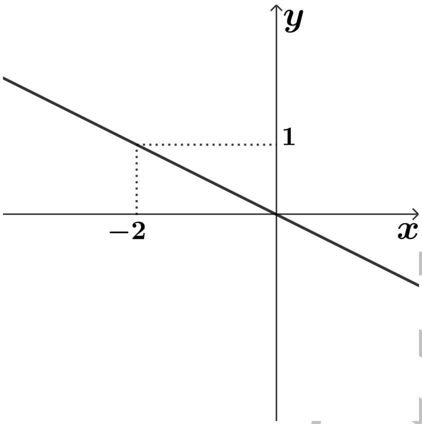
a)



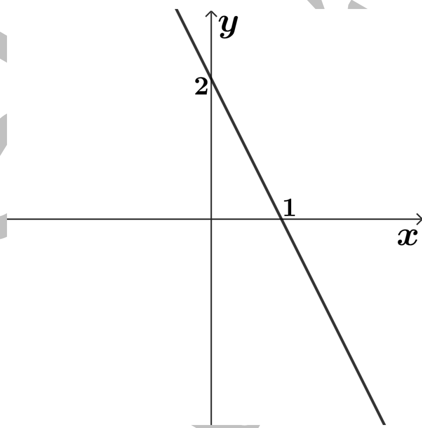
b)



c)



d)



Ejercicio 9. Hallar, en cada caso, el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que:

a) la recta de ecuación $y = kx + 5$ pase por el punto $(1, 4)$.

b) la recta de ecuación $y = -2x + k$ pase por el punto $(-3, 1)$.

Ejercicio 10. Hallar, si existe, el punto de intersección de los gráficos de f y g, siendo:

a) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 6$.

b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$, $g(x) = -\dfrac{1}{3}x - 1$.

c) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 2x + 5$.

Ejercicio 11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,3)$ y que es paralela a la recta de ecuación $y = 5x + 2$.

Ejercicio 12. (*Función Demanda*) La demanda semanal de cierto producto es de 5 unidades cuando el precio es $\$80$ por unidad y de 15 unidades cuando el precio es $\$40$ por unidad.

a) Hallar la función demanda $p = D(q)$ si se sabe que es lineal, siendo p el precio de una unidad y q la cantidad de unidades demandadas. Indicar su dominio.

b) Calcular $D(16)$. ¿Qué representa este valor ?

c) ¿Cuántas unidades serán demandadas si el precio se fija en $\$52$?

Ejercicio 13. (*Función Oferta. Equilibrio del mercado*) Un fabricante de zapatos está dispuesto a colocar en el mercado 25 pares de zapatos cuando el precio de cada par se fija en $\$20$ y 60 pares cuando el precio se fija en $\$41$.

a) Hallar la función oferta $p = O(q)$ si se sabe que es lineal, siendo p el precio de cada par y q la cantidad de pares ofertados. Indicar su dominio.

b) Se ha podido determinar que la función de demanda de este producto viene dada por $p = D(q) = -\frac{1}{2}q + 38$. Hallar la cantidad de pares que deben fabricarse para que la oferta coincida con la demanda (*cantidad de equilibrio*) e indicar el precio del par en este caso (*precio de equilibrio*).

c) Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones de oferta y de demanda e interpretar geométricamente el punto de equilibrio $P = (cantidad, precio)$.

Ejercicio 14. El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se producen 13500 unidades a un precio de $\$4,50$ por unidad. El productor no proveerá unidades a $\$1$ y el consumidor no demandará unidades a $\$20$. Hallar las funciones de oferta y de demanda suponiendo que ambas son lineales.

Ejercicio 15. Una compañía que repara fotocopiadoras comerciales cobra por cada servicio una cantidad fija más una tarifa por hora de trabajo. Un cliente tiene una factura de $\$150$ por un servicio de una hora y otra de $\$280$ por un servicio de tres horas. Hallar la función lineal $f(x) = mx + b$ que describe el precio a facturar en función del número de horas de servicio e indicar qué representan m y b en el contexto de este problema.

Ejercicio 16. Graficar cada una de las siguientes funciones cuadráticas y hallar las coordenadas de su vértice.

a) $f(x) = x^2 + 4$

b) $f(x) = -(x-2)^2$

c) $f(x) = (x+2)^2 - 4$

d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

e) $f(x) = -2x^2 + 6x$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$

Ejercicio 17. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas cuyos gráficos se muestran a continuación, hallar:

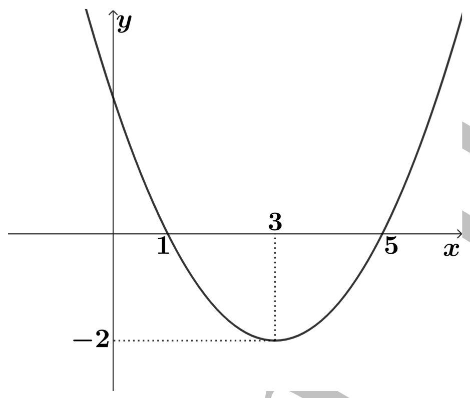
i) los conjuntos de positividad y de negatividad.

ii) los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

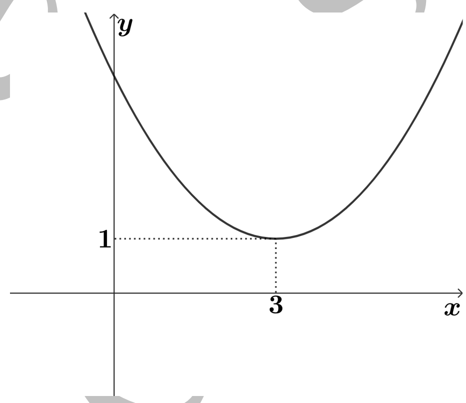
iii) el máximo o el mínimo.

iv) la imagen.

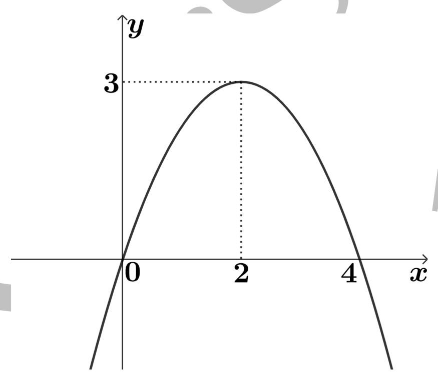
a)



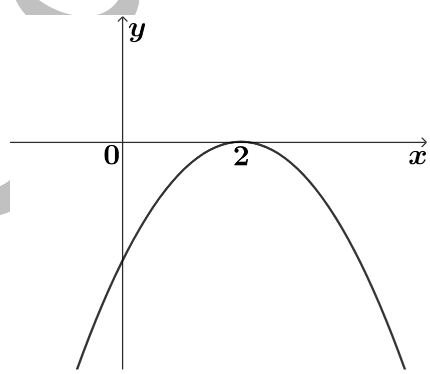
b)



c)



d)



Ejercicio 18. Hallar la fórmula de la función cuadrática f cuyo conjunto de positividad es el intervalo $(-2,3)$ y tal que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 6]$.

Ejercicio 19. Hallar, si existen, los puntos de intersección de los gráficos de f y g, siendo:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$, $g(x) = 3x + 7$.

b) $f(x) = -x^2 + x + 1$, $g(x) = -2x + 4$.

c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$, $g(x) = 2x^2 - x + 5$.

e) f la función lineal tal que $f(2) = 5$ y $f(4) = 9$, $g(x) = x^2 + 6x + 5$.

Ejercicio 20. Las funciones de oferta y de demanda de cierto artículo de consumo vienen dadas por las fórmulas $p = O(q) = q^2 + 100$ y $p = D(q) = -20q + 2500$. Hallar el punto de equilibrio del mercado.

Ejercicio 21. (*Funciones Ingreso y Ganancia*) Sea $p = D(q) = 1200 - 3q$ la función demanda para el producto de un fabricante.

a) El *Ingreso Total* $I(q)$ se define (en función de la cantidad q) como el precio p por la cantidad q, es decir, $I(q) = qD(q)$. Escribir la fórmula de la función ingreso total para el fabricante, hallar el nivel de producción (cantidad de unidades) que maximiza el ingreso y calcular el valor de dicho ingreso máximo.

b) Se define la *Ganancia* $G(q)$ (en función de la cantidad q) como el ingreso $I(q)$ menos los costos $C(q)$, es decir, $G(q) = I(q) - C(q)$. Si los costos de producción de q unidades del producto están dados por $C(q) = 9q^2$, escribir la función ganancia y hallar la cantidad de unidades que deben producirse para que la ganancia sea máxima. ¿A cuánto asciende dicha ganancia máxima ?

Ejercicio 22. Graficar las siguientes funciones y obtener a partir del gráfico la imagen y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$.

a) $f(x) = (x-1)^3 + 3$

b) $f(x) = -2(x+1)^3$

c) $f(x) = -x^4 + 1$

d) $f(x) = 3(x-1)^4 - 2$

Ejercicio 23. Graficar las siguientes funciones homográficas. En cada caso dar el dominio y obtener a partir del gráfico la imagen y el comportamiento en el infinito.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

c) $f(x) = -\dfrac{2}{x-4} + 3$

d) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-8}$

Ejercicio 24. Las funciones de oferta y de demanda de cierto producto vienen dadas por las fórmulas $p = O(q) = \frac{1}{5}q + 7$ y $p = D(q) = \dfrac{3240}{q+20}$. Hallar el punto de equilibrio.

Ejercicio 25. A partir de los gráficos de las funciones seno y coseno, obtener los gráficos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x+\pi)$

b) $f(x) = \cos(x-\pi) + 1$

c) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = 2\cos(2x)$

Ejercicio 26. Completar la siguiente tabla de valores.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	1	2
$g(x)$	4	2	1	1
$f \circ g(x)$				
$g \circ f(x)$				

Ejercicio 27. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$ e indicar su dominio en cada caso.

a) $f(x) = 2x+1$, $g(x) = 3x+4$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{2x-8}$, $g(x) = x^2$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Ejercicio 28. Sean $f(x) = x^2 + 5x$ y $g(x) = 2x - 4$. Hallar los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Ejercicio 29. Sean $f(x) = 2x$, $g(x) = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{x-1}{x+4}$ y $h(x) = g \circ f(x)$. Hallar el dominio y el conjunto de ceros de h.

Ejercicio 30. Calcular f^{-1} y dar su dominio. Graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-3$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+1$

c) $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\dfrac{3}{x+1}+2$

d) $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{4x-5}$

f) $f:[-5,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+5}$

g) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2$

h) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2$

Ejercicio 31. Sean $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x-2}$ y $g(x)=|x|$. Escribir el dominio de $f\circ g$ como intervalo o unión de intervalos y hallar, si existen, su supremo y su ínfimo.

Ejercicio 32.

a) La función de demanda de cierto artículo viene dada por $p=D(q)=-0,5q+100$. Calcular la función inversa $q=D^{-1}(p)$.

b) La función de oferta de cierto producto viene dada por $p=O(q)=0,25q+10$. Calcular la función inversa $q=O^{-1}(p)$.

c) Interpretar el crecimiento o decrecimiento de las funciones obtenidas.

Ejercicio 33. Las funciones de oferta y de demanda de cierto artículo de consumo vienen dadas por las fórmulas $p=O(q)=\sqrt{q+10}$ y $p=D(q)=20-q$. Hallar el punto de equilibrio.

Ejercicio 34. Graficar las siguientes funciones exponenciales y hallar su imagen. Analizar en cada caso el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$.

a) $f(x)=e^{x-1}$

b) $f(x)=e^{-2x}-3$

c) $f(x)=6e^{x+2}-5$

d) $f(x)=3-e^{-x+1}$

Ejercicio 35. Hallar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas. Graficarlas y analizar, si corresponde, su comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$.

a) $f(x)=\ln(x-3)$

b) $f(x)=\ln(-x)$

c) $f(x) = 3\ln(x+1) - 4$

d) $f(x) = 1 - \ln(x-2)$

Ejercicio 36. Hallar el dominio, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(5-2x)$

b) $f(x) = \ln(2x^2 - x)$

c) $f(x) = e^{3x-5} + 4$

d) $f(x) = 1 - e^{2x+1}$

Ejercicio 37. Hallar, en cada caso, la fórmula de f^{-1} e indicar su dominio.

a) $f(x) = 1 + 2e^{4x+3}$

b) $f(x) = \ln(3x+6)$

c) $f(x) = \dfrac{e^{5-2x}+7}{3}$

d) $f(x) = 3 - 4\ln(5x-2)$

Ejercicio 38. Sea $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+3)}$.

a) Escribir el dominio de f como intervalo o unión de intervalos.

b) Calcular $f^{-1}(x)$.

Ejercicio 39. Sean $f(x) = \ln(x-4)$ y $g(x) = \dfrac{5}{x+1}$. Hallar el dominio y escribir el conjunto de negatividad de $f \circ g$ como intervalo o unión de intervalos.

Ejercicio 40. Sean $f(x) = \sqrt{x+5} - \ln(2-3x)$ y $A = \mathrm{Dom}(f)$. Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de A.

Ejercicio 41. Para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 4x - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

i) Calcular $f(-2)$, $f(1)$ y $f(3)$.

ii) Dar el dominio.

iii) Hallar los conjuntos de ceros, de positividad y de negatividad.

iv) Graficar.

Ejercicio 42. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

i) Si f es la función lineal que verifica $f(-1) = 1$ y $f(1) = 5$, entonces $f(3) =$

[a] 13 [b] 9 [c] 2 [d] 0

ii) Si f es la función cuadrática que verifica $f(-1) = f(7) = 0$ y cuya imagen es el intervalo $(-\infty, 14]$, entonces f es creciente en

[a] $(-1,7)$ [b] $(-\infty,3)$ [c] $(-\infty,4)$ [d] $(3+\infty)$

iii) Sean $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \dfrac{3x-1}{-x+2}$ y $h(x) = f \circ g(x)$. Entonces la imagen de h es

[a] $\mathbb{R} - \{2\}$ [b] $\mathbb{R} - \{-3\}$ [c] $\mathbb{R} - \{-2\}$ [d] $\mathbb{R} - \{4\}$

iv) El dominio de $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$ es igual a

[a] $(3,+\infty)$ [b] $(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

[c] $(-3,3)$ [d] $\mathbb{R} - \{-3,3\}$

vi) El conjunto de negatividad de $f(x) = \ln(2x-5)$ es el intervalo

[a] $(-\infty,3)$ [b] $(0,3)$ [c] $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ [d] $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$

v) Si la función oferta de cierto producto es $p = O(q) = 25 + 6e^{4q}$, entonces la cantidad q ofertada en función del precio p es

[a] $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{p-25}{6}\right)$ [b] $\dfrac{4\ln(p)-25}{6}$

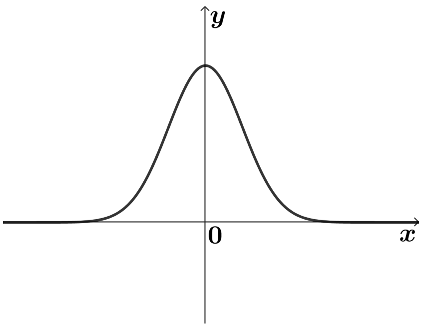
[c] $4e^{\frac{p-25}{6}}$ [d] $\dfrac{\ln(p)-\ln(25)}{24}$

Práctica 3: Límite y continuidad

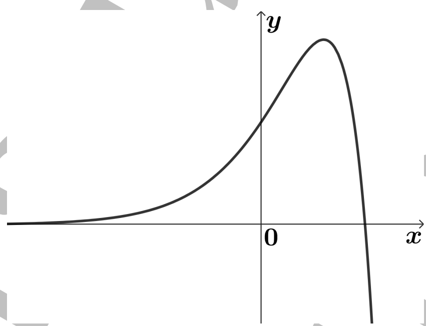
Ejercicio 1. Analizando el gráfico de f en cada caso, determinar, si existen,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

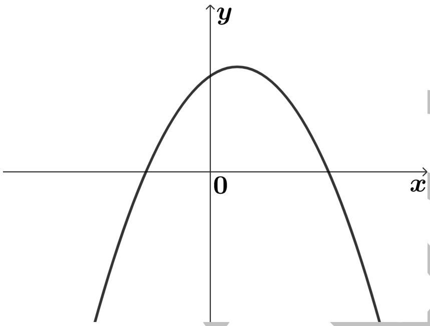
a)



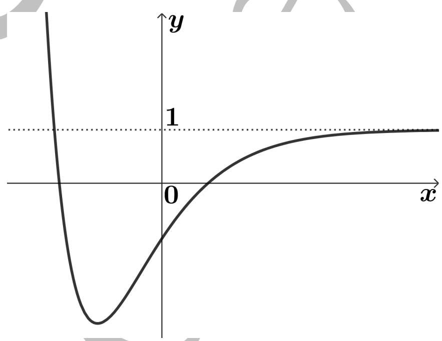
b)



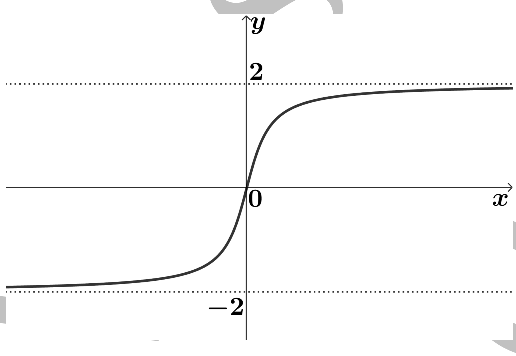
c)



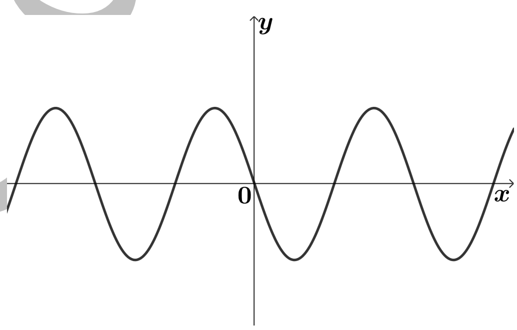
d)



e)



f)



Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{100}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+3}{4x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2-2x}{2x^2+7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{3x^2+x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{(9x+1)(2x-1)}{3x^2+5}$

Ejercicio 3. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, siendo:

a) $f(x)=5x^2-2x^3$

b) $f(x)=\dfrac{-4x^3+3x-1}{5x^2+3}$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-7}{x^3+3x-6}$

d) $f(x)=\dfrac{(2x+3)(x^2-5)}{x^3-1}$

e) $f(x)=\dfrac{6x^2}{3x-1}+\dfrac{2x^2}{x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{6x^2}{3x-1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4\sqrt{x}+1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{3x^2+2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+5}}{\sqrt{x}+2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt{x}-x^2+7$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x+5}-3\sqrt{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{9x+5}-3\sqrt{x})$

Ejercicio 5. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, siendo:

a) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{4x^2-1}}{5x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$

c) $f(x)=\dfrac{e^{x+1}-3}{e^x+6}$

d) $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{5x+3}\right)^x$

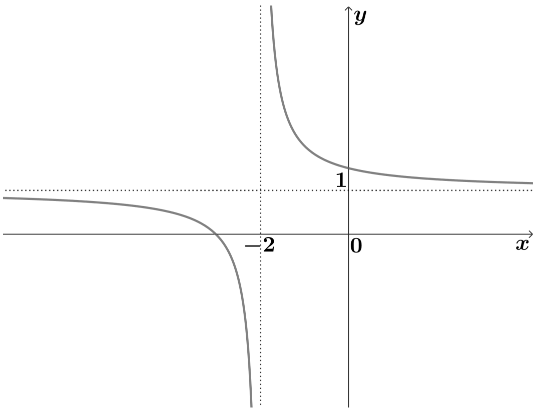
e) $f(x)=\sqrt{4x^2+6x-5}-2x$

f) $f(x)=3+\dfrac{\cos(x^2+1)}{x}$

Ejercicio 6. Dados los siguientes gráficos, determinar los límites que se indican.

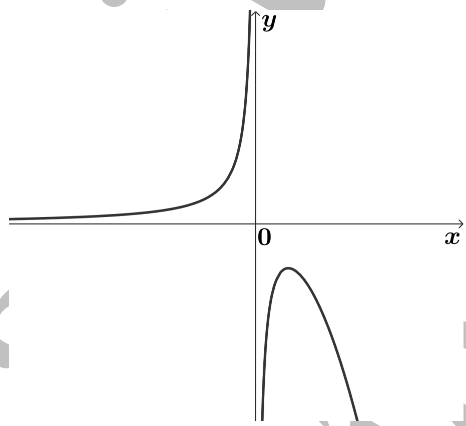
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$



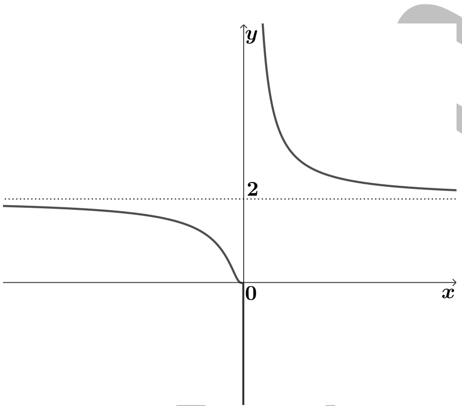
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$



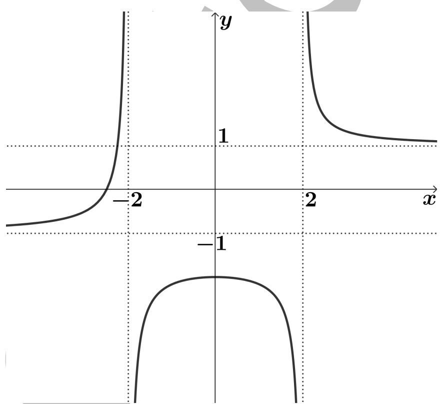
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$



d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) \quad \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$



Ejercicio 7. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^5+x-2}{x^4}$ *b)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3-2x^2}{2x^3+3x^2+7}$ *c)* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-2x^2-2x+4}{(x+2)^3}$ *e)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ *f)* $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3x-9}{x-\sqrt{2x+3}}$ *h)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}{x^2-2x}$ *i)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{3x-2}}$

Ejercicio 8. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+ax+1}-1}{x} = 3$.

Ejercicio 9. Sea $f(x) = \dfrac{x^2+ax+2}{x+1-\sqrt{4x+1}}$.

a) Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ sea finito.

b) Para el valor de a encontrado, calcular dicho límite.

Ejercicio 10. Hallar el dominio y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

e) $f(x) = 3 + e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \dfrac{2e^x+5}{e^x-1}$

g) $f(x) = \ln(7-4x)$

h) $f(x) = \ln(x^2-9)$

i) $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x+3)}{4x^2+1}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2-4}+x$

Ejercicio 11. Sea $f(x) = \dfrac{kx^2+11x-2}{2x^2-8}$.

a) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $y = 3$ sea asíntota horizontal de f.

b) Para el valor de k obtenido, hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

Ejercicio 12. Calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-x}{3x^2+5}\right)^{2x+7}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{\mathrm{sen}(3x)}{x^2}\right)^{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4x+7}{3x+1}\right)^{x+5}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x^2}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (1+2x)^{\frac{1}{x^2}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{4}{x^2-1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{3x+1}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

Ejercicio 13. Sea $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{ax}$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual la recta $y = \sqrt{e}$ es asíntota horizontal del gráfico de f .

Ejercicio 14. En cada caso, analizar la continuidad de f en el punto x_0 indicado. En caso de no ser continua, decidir si la discontinuidad es evitable o esencial. Hacer el gráfico de f.

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

Ejercicio 15. Hallar el dominio y determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Decidir en cada caso si la discontinuidad es evitable o esencial.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Ejercicio 16. En cada caso, hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua en el punto x_0 indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-4x+3 & \text{si } x < 1 \\ -5x+a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & \text{si } x \neq -1 \\ a & \text{si } x = -1 \end{cases}$, $x_0 = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-x+5 & \text{si } x < a \\ 3x+1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$, $x_0 = a$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2} & \text{si } x > -2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } x \le -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-6}{\sqrt{x+1}-2} & \text{si } x > 3 \\ \dfrac{x-a}{2} & \text{si } x \le 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{a}{x^2+3} & \text{si } x \le 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con exactamente dos ceros y con la siguiente tabla de valores:

x	-7	-1	0	1	5
$f(x)$	2	0	-1	0	3

Hallar los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

Ejercicio 18. Hallar el dominio, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x(5-3x)(x+3)^3$

b) $f(x) = -3(x^2-1)(x^2-3x-4)$

c) $f(x) = \dfrac{(x^2+5)(x^2-4)}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{x+5}-1}{x^2-2x}$

e) $f(x) = \dfrac{3x-4}{\sqrt{x}-2}$

f) $f(x) = x\ln(2x+5)$

Ejercicio 19. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

a) Las ecuaciones de las asíntotas de $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{(2x-1)(x-1)}$ son

$\boxed{a}$ $y = 4 \,;\; x = 1$

$\boxed{b}$ $y = 2 \,;\; x = \dfrac{1}{2} \,;\; x = 1$

$\boxed{c}$ $y = 4 \,;\; x = 1 \,;\; x = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{d}$ $y = 2 \,;\; x = 1$

b) Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{6x+3}-\sqrt{5x+4}}$ si $x > 1$ y $f(x) = k$ si $x \leq 1$. Entonces f es continua en $x_0 = 1$ para

$\boxed{a}$ $k = 0$ $\boxed{b}$ $k = 6$ $\boxed{c}$ $k = 12$ $\boxed{d}$ ningún valor de k

c) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+a}{2x}\right)^{x+3} = e^3$, entonces

$\boxed{a}$ $a = -1$ $\boxed{b}$ $a = 2$ $\boxed{c}$ $a = 6$ $\boxed{d}$ $a = 0$

d) El conjunto de positividad de $f(x) = -2x(x^2 + x - 6)$ es

$\boxed{a}$ $(-\infty, -3)$ $\boxed{b}$ $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$

$\boxed{c}$ $(0, 2)$ $\boxed{d}$ $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$

e) El dominio de $f(x) = \ln\big((x^5 + 4x^3)(x-1)\big)$ es

$\boxed{a}$ $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ $\boxed{b}$ $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

$\boxed{c}$ $(-2, 0) \cup (1, 2)$ $\boxed{d}$ $(0, 1)$

f) Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{36x+5}}{a\sqrt{x}-b}$. Si las ecuaciones de las asíntotas de f son $x = 9$ e $y = 3$, entonces $b =$

$\boxed{a}$ 2 $\boxed{b}$ 6 $\boxed{c}$ 12 $\boxed{d}$ 36

Práctica 4: Derivadas

Ejercicio 1. Calcular $f'(x_0)$ por definición en cada caso.

a) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 2$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$

Ejercicio 2. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$

c) $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{x^5}$

d) $f(x) = x^{2/3} - \dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}$

e) $f(x) = 4e^x + \ln x$

f) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)$

g) $f(x) = \left(5x + \dfrac{2}{x^3}\right)\ln x$

h) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3x) + x^3$

i) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right)(x^2 + x)$

j) $f(x) = \mathrm{sen}(x)(x^2 + \cos(x))$

k) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2} + 5$

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2e^x + 1}$

m) $f(x) = \dfrac{7x + \ln x}{x^2 - 2x}$

n) $f(x) = \dfrac{x + \mathrm{sen}(x)}{3 - \cos(x)}$

Ejercicio 3. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (2x + 1)^{15}$

b) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x}$

c) $f(x) = \left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^x + 1}}$

e) $f(x) = 4 - e^{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \ln^2(2x - 1) + x^3$

g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$

h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

i) $f(x) = x^2 e^{3x-1}$

j) $f(x) = \ln(\ln(7x + 2))$

k) $f(x) = \text{sen}^2(3x) + \cos(x^2 + 3)$

l) $f(x) = \text{sen}(\sqrt{x^4 + e^{5x}})$

Ejercicio 4. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{x^2+4x}$

b) $f(x) = (e^{3x} + 5)^{\ln x}$

c) $f(x) = \left(3 + x^2\right)^{\text{sen}^2(x)}$

d) $f(x) = (\ln x)^x + 3x$

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = x_0$.

a) $f(x) = -3x^2 + x + 2$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = (3x + 2)e^{x+1}$, $x_0 = -1$

c) $f(x) = (x + 2)^{2x}$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 2}}{x}$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = x + \ln(x^2 - 8)$, $x_0 = 3$

f) $f(x) = x\cos(2x) + \text{sen}(3x)$, $x_0 = \pi$

Ejercicio 6. Sea $f(x) = \ln(x^2 - 60)$. Hallar todos los $x_0 \in \text{Dom}(f)$ tales que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es igual a 4.

Ejercicio 7. Sea $f(x) = (kx + 1)e^{2x}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0 = 0$ sea paralela a la recta $y = 6x - 5$.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$. Hallar todos los puntos del gráfico de f en donde la recta tangente tiene ecuación $y = 4x + 9$.

Ejercicio 9. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \dfrac{ax + b}{x - 1}$ en el punto $(2, f(2))$ tenga ecuación $y = -x + 6$.

Aplicación: *Funciones marginales* (Ejercicios 10 al 15)

En Economía, el término "marginal" hace referencia al análisis acerca de cómo reaccionará una variable económica ante un pequeño cambio en otra variable de la cual depende. El instrumento matemático que lo hace posible es la derivada.

En este curso haremos mención de las siguientes funciones marginales:

- *Costo marginal* $C'(x)$ (derivada de la función costo $C(x)$).
- *Demanda marginal* $D'(x)$ (derivada de la función demanda $D(x)$).

- *Oferta marginal* $O'(x)$ (derivada de la función oferta $O(x)$).
- *Ingreso marginal* $I'(x)$ (derivada de la función ingreso $I(x) = xD(x)$).
- *Ganancia marginal* $G'(x)$ (derivada de la función ganancia $G(x) = I(x) - C(x)$).

Ejercicio 10. (*Costo marginal*) Una empresa sabe que el costo para producir x litros de cierto producto químico es $C(x)$ pesos, donde $C(x) = 30 + x + \dfrac{10}{x}$. Calcular el costo marginal cuando se producen 10 litros.

Ejercicio 11. (*Demanda marginal*) Sea $p = D(x) = \dfrac{e^{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}}$ la función de demanda de cierto artículo. Calcular la demanda marginal cuando se producen 4 unidades.

Ejercicio 12. (*Oferta marginal*) Si la función oferta de cierto producto es $p = O(x) = \dfrac{20x}{\sqrt{36+4x}}$, calcular la oferta marginal cuando se producen 16 unidadades.

Ejercicio 13. (*Ingreso marginal*) La función de demanda de un producto es $p = D(x) = \dfrac{1000}{x+5}$. Hallar la función de ingreso marginal y calcular el ingreso marginal para 45 unidades.

Ejercicio 14. La función de demanda de x unidades de cierto artículo de consumo viene dada por $p = D(x) = \sqrt{1200 - 2x}$ para $0 \leq x \leq 600$.

a) Hallar las funciones demanda marginal, ingreso total e ingreso marginal.

b) Hallar la demanda y el ingreso marginales cuando se producen 400 unidades.

Ejercicio 15. (*Ganancia marginal*) El costo y la demanda de cierto artículo de consumo vienen dados por $C(x) = 2x^2 + 88$ y $p = D(x) = \dfrac{1000}{x+1}$.

a) Hallar las funciones de ganancia y de ganancia marginal.

b) Calcular la ganancia y la ganancia marginal cuando se producen 4 unidades.

Aplicación: *Elasticidad de la demanda* (Ejercicios 16 y 17)
Si $p = D(x)$ es la función demanda de cierto producto, se define el *coeficiente de elasticidad puntual*, denotado por la letra griega η (eta), como

$$\eta = \left| \frac{D(x)}{xD'(x)} \right|.$$

Este coeficiente mide el cambio porcentual de la cantidad demandada en relación con un cambio porcentual en el precio. Se clasifica en:

- *elástica* si $\eta > 1$.
- *unitaria* si $\eta = 1$.
- *inelástica* si $\eta < 1$.

Ejercicio 16. Calcular la elasticidad de la demanda en los valores indicados y determinar si la misma es elástica, unitaria o inelástica.

a) $p = D(x) = -100x + 5000$, $x = 10$.

b) $p = D(x) = \dfrac{100}{x^2}$, $x = 20$.

c) $p = D(x) = 15e^{-x/10}$, $x = 10$.

d) $p = D(x) = \dfrac{200}{\sqrt{6000 + 10x^2}}$, $x = 100$.

Ejercicio 17. La función de demanda de cierto producto es $p = D(x) = 1200 - x^2$. Hallar todos los valores de x en los que el coeficiente de elasticidad es unitario.

Ejercicio 18. Para cada uno de los siguientes gráficos de la función f, hallar:

i) los puntos donde no existe la derivada de f.

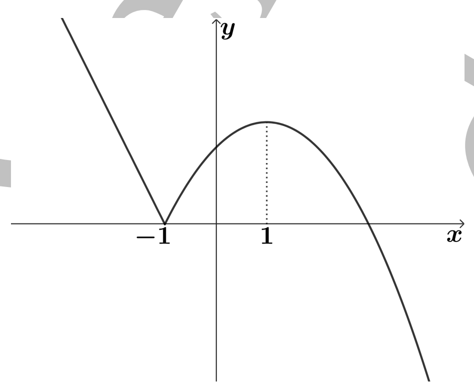
ii) el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\}$.

iii) el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\}$.

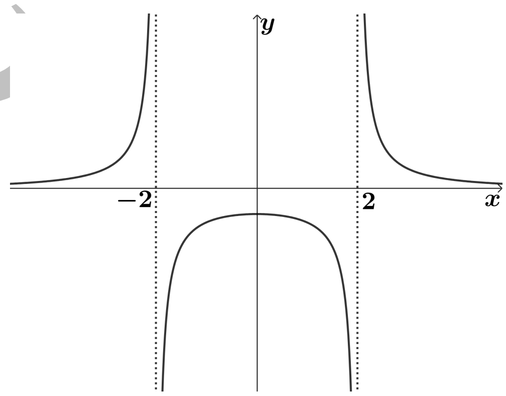
iv) el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$.

v) los máximos y mínimos locales de f.

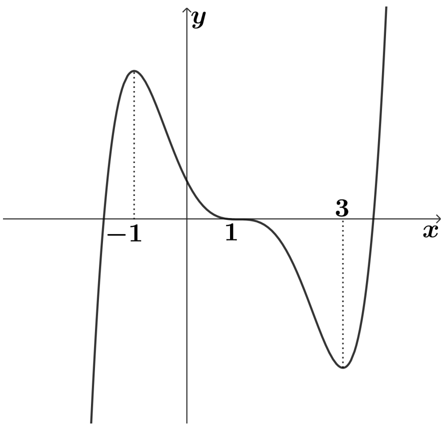
a)



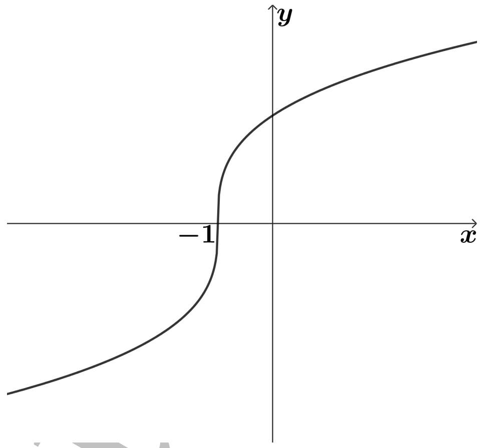
b)



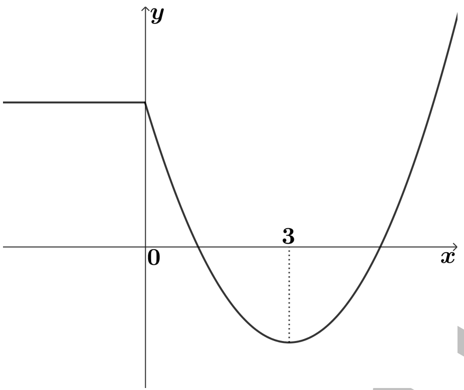
c)



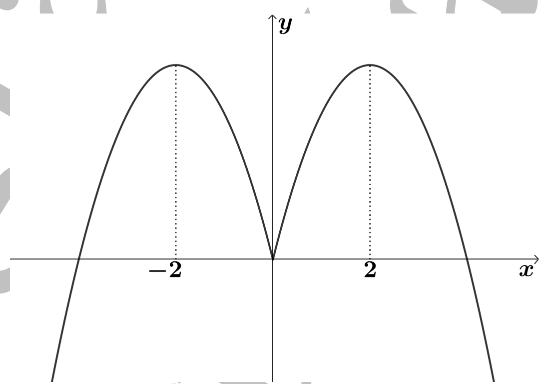
d)



e)



f)



Ejercicio 19. Para las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos relativos.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

b) $f(x) = 4x^5 + x + 2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

d) $f(x) = 6x^3(x-1)^2$

Ejercicio 20. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = xe^{-x}$

b) $f(x) = x^4 e^{x/2}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

d) $f(x) = x^2 \ln(3x)$

e) $f(x) = x^3 + 12\ln(x^2)$

f) $f(x) = x - \sqrt{2x+5}$

g) $f(x) = \sqrt{x}(6-x)$

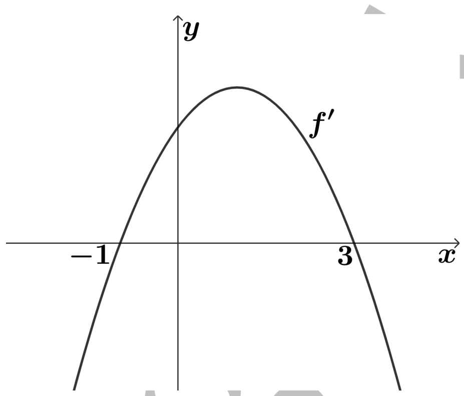
h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$

Ejercicio 21. Sea $f(x) = e^{3x^2+k} - 3x^2 + 7$.

a) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que f tiene un extremo local en $x = -2$.

b) Para el valor de k hallado, hallar los máximos y mínimos locales de f.

Ejercicio 22. A continuación se muestra el gráfico de la derivada de una función f. Hallar los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y los extremos relativos de f.



Ejercicio 23. Sea $p = D(x) = \sqrt{900 - x}$ la función de demanda de cierto producto, con $0 \leq x \leq 900$. Hallar la cantidad de unidades que deben producirse para que el ingreso total sea máximo.

Ejercicio 24. Sean $C(x) = 2x^2 + 120$ y $D(x) = -2x + 480$ las funciones de costo y de demanda de cierto artículo de consumo. Hallar la cantidad de unidades que deben producirse de manera que la ganancia resulte máxima y calcular a cuánto asciende dicha ganancia.

Ejercicio 25. El costo y la demanda de cierto producto vienen dados por $C(x) = 4x + 100$ y $D(x) = \dfrac{1200}{x+3}$. Calcular la cantidad de unidades a producir para que la ganancia sea máxima.

Ejercicio 26. Para cada una de las siguientes funciones, hallar:

- el dominio.
- los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- los extremos locales.
- las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

Con la información obtenida, hacer un gráfico aproximado de f y dar su imagen.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$

b) $f(x) = x^3 + \dfrac{12}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2-5x}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-5}$

e) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+5}}$

g) $f(x) = x^{2/3}(5-x)$

h) $f(x) = e^{x^3-3x+4}$

i) $f(x) = \ln(x^2-9)$

j) $f(x) = \ln(3x) + \dfrac{18}{x^2}$

Ejercicio 27. Para las siguientes funciones, hallar los extremos relativos y absolutos en el intervalo indicado.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ en $[-2, 1]$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ en $[4, 5]$

c) $f(x) = \sqrt{16x^2 - 3x + 4}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ en $[-9, 0]$

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$ en $[1, 4]$

f) $f(x) = 2x - \ln(4x)$ en $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{e}{4}\right]$

Ejercicio 28. Hallar el dominio, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 5x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

e) $f(x) = (2x+1)e^{2x}$

f) $f(x) = 2x^2 + \ln x$

Ejercicio 29. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

i) La ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 5x + \ln\left(x^2 + \dfrac{3}{4}\right)$ en $x_0 = \dfrac{1}{2}$ es

$\boxed{a}$ $y = 6x$ $\boxed{b}$ $y = 6x - \dfrac{1}{2}$ $\boxed{c}$ $y = 8x$ $\boxed{d}$ $y = 8x - \dfrac{3}{2}$

ii) Si $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, entonces $(g \circ f)'(-1) =$

$\boxed{a}$ $\dfrac{3}{2}$ $\boxed{b}$ $\dfrac{3}{4}$ $\boxed{c}$ -3 $\boxed{d}$ $-\dfrac{3}{16}$

iii) Si la función demanda es $p = D(x) = \sqrt{125 - x^2}$, entonces el ingreso marginal para 5 unidades es

$\boxed{a}$ $7,5$ $\boxed{b}$ $12,5$ $\boxed{c}$ 50 $\boxed{d}$ 25

iv) Sea $f(x) = (x+1)^x + 5$. Entonces $f'(x) =$

$\boxed{a}$ $(x+1)^x \ln(x+1)$ $\boxed{b}$ $x(x+1)^{x-1}$

$\boxed{c}$ $(x+1)^x \left(\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right)$ $\boxed{d}$ $((x+1)^x + 5)\left(\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right)$

v) Si la derivada de f es $f'(x) = x^3 - 6x^2$, entonces

$\boxed{a}$ f tiene un máximo en $x = 6$ y un mínimo en $x = 0$

$\boxed{b}$ f tiene un mínimo en $x = 6$ y no tiene máximos

$\boxed{c}$ f tiene un máximo en $x = 6$ y no tiene mínimos

$\boxed{d}$ f tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 4$

vi) La función $f(x) = \sqrt{x+2} - x$ es creciente en el intervalo

$\boxed{a}$ $\left(-2, -\dfrac{7}{4}\right)$ $\boxed{b}$ $(-2, -1)$ $\boxed{c}$ $\left(-\dfrac{7}{4}, +\infty\right)$ $\boxed{d}$ $(-1, +\infty)$

vii) En el intervalo $[1, 3]$ la función $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ alcanza su mínimo absoluto en x_m y su máximo absoluto en x_M. Entonces

$\boxed{a}$ $x_m = 1$ y $x_M = 3$ $\boxed{b}$ $x_m = 2$ y $x_M = 3$

$\boxed{c}$ $x_m = 2$ y $x_M = 1$ $\boxed{d}$ $x_m = 1$ y $x_M = 2$

viii) Si la función $f(x) = (x+k)e^{-x}$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$, entonces

$\boxed{a}$ $k = -1$ $\boxed{b}$ $k = 0$ $\boxed{c}$ $k = 2$ $\boxed{d}$ $k = 3$

Práctica 5: Regla de L'Hôpital. Polinomio de Taylor

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x^3-2x^2-2x-3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-7x^2+16x-12}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3+x^2-2x-8}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-x+1}{x^2-5x+4}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{(x+2)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{e^{1-x}+x-2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{xe^{2x-4}+x^2-6}{\ln(3x-5)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(6x)}{1-\cos(3x)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{sen}(x)}{x^3}$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2+2x+4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^2+2x+4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+\mathrm{sen}(x)}{x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(5x^2+7)-4}{\ln(2x^2+3)+1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(4x+e^{3x})}{2x}$

Ejercicio 3. Hallar el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $\displaystyle f(x)=\frac{e^{3x-6}-1}{(x-2)^2}$

b) $\displaystyle f(x)=\frac{5-x}{\ln(x-4)}$

c) $\displaystyle f(x)=\frac{\ln(4x^2+1)}{3x^2}$

d) $\displaystyle f(x)=1+\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x^2-3x}$

Ejercicio 4. Hallar, en cada caso, el valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}+e^{-3x}-2}{ax^2}=3$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^{2a-1}+x^a-2x^3-2}{x^2-1}=12$

Ejercicio 5. Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $x = 2$ sea asíntota vertical de la función

$$f(x) = \frac{3e^{x-2} - 6x + 9}{k\ln(x-1) - x^2 + 3x - 2}.$$

Ejercicio 6. Hallar, en cada caso, el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en el punto x_0 indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(4x-7)}{x^3 - 2x^2} & \text{si } x > 2 \\ ax + 7 & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad , \ x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3e^{ax} + 2x - 3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad , \ x_0 = 0$

Ejercicio 7. Calcular $f'(0)$ por definición si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3e^{x-5} - x + 2}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$.

a) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual f es continua en $x = 5$.

b) Para el valor de k hallado, calcular $f'(5)$ por definición.

Ejercicio 9. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(kx)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Hallar $k > 0$ para el cual $f'(0) = 16$.

Ejercicio 10. Para cada una de las siguientes funciones, obtener el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto x_0 indicado.

a) $f(x) = xe^{2x}$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{3+x}{3-x}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt{3x-2}$, $x_0 = 2$

d) $f(x) = 1 - 5x + \cos(x+1)$, $x_0 = -1$

e) $f(x) = 3 + \ln(x^2 + 3x + 1)$, $x_0 = 0$

Ejercicio 11. Obtener, en cada caso, un valor aproximado de $f(x_1)$ mediante el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto x_0.

a) $f(x) = \sqrt{100 + x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

b) $f(x) = x + e^{2x-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{11}{10}$

c) $f(x) = \ln(3x - 2)$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}2$

d) $f(x) = 4\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

Ejercicio 12. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $P(x) = 2x + 6x^2$ sea el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = axe^{2x} + bx$ en $x_0 = 0$.

Ejercicio 13. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

a) El $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 5x}{e^{2x} - 1}$ es igual a

$\boxed{a}$ -5 $\boxed{b}$ $-\dfrac{5}{2}$ $\boxed{c}$ 0 $\boxed{d}$ $-\dfrac{3}{2}$

b) Sea $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x} + 1)}{x}$. Entonces las ecuaciones de todas las asíntotas de f son

$\boxed{a}$ $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ $\boxed{b}$ $y = 0$, $y = 2$

$\boxed{c}$ $x = 0$, $y = 2$ $\boxed{d}$ $x = 0$, $y = 0$

c) Sea $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x^2 - 9)}{(x+3)^2(x-3)}$. Entonces:

$\boxed{a}$ $x = -3$ es una discontinuidad esencial y $x = 3$ es una discontinuidad evitable

$\boxed{b}$ $x = -3$ es una discontinuidad evitable y $x = 3$ es una discontinuidad esencial

$\boxed{c}$ $x = -3$ y $x = 3$ son ambas discontinuidades evitables

$\boxed{d}$ $x = -3$ y $x = 3$ son ambas discontinuidades esenciales *d)* La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{2x-4}-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 2$ si

$\boxed{a}$ $a = 0$ $\boxed{b}$ $a = 1$ $\boxed{c}$ $a = 2$ $\boxed{d}$ $a = 5$

e) El polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 1$ de $f(x) = \ln(2x-1)$ es $P(x) =$

$\boxed{a}$ $2(x-1) - 2(x-1)^2$ $\boxed{b}$ $1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

$\boxed{c}$ $2(x-1) - 4(x-1)^2$ $\boxed{d}$ $1 + 2(x-1) - (x-1)^2$

f) El polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de $f(x) = xe^{2x}$ es $P(x) =$

$\boxed{a}$ $x + x^2 + x^3$ $\boxed{b}$ $x + 2x^2 + 4x^3$

$\boxed{c}$ $x + 2x^2 + 2x^3$ $\boxed{d}$ $2x + 2x^2 + 4x^3$

g) Sean $k > 0$ y $f(x) = \cos(x^2 + kx)$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$ es $P(x) = 1 - 18x^2$, entonces k es igual a

$\boxed{a}$ $k = 0$ $\boxed{b}$ $k = 3$ $\boxed{c}$ $k = \sqrt{18}$ $\boxed{d}$ $k = 6$

Práctica 6: Integrales

Ejercicio 1. Hallar una primitiva de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$ *b*) $f(x) = x^3 + x^{1/3}$ *c*) $f(x) = \dfrac{7}{x^2}$

d) $f(x) = e^x - x^2$ *e*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \cos(x)$ *f*) $f(x) = x^4 - 2\,\text{sen}(x)$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar $F(x)$ sabiendo que:

a) $F'(x) = 2x^2 - 4x + 5$ y $F(0) = 1$ *b*) $F'(x) = e^x + 5$ y $F(0) = 7$

c) $F'(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}$ y $F(1) = 3$ *d*) $F'(x) = \cos(x)$ y $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales indefinidas.

a) $\displaystyle\int 4x + 3\, dx$ *b*) $\displaystyle\int 3x^2 + 2x - 1\, dx$

c) $\displaystyle\int 3x^5 - x^4\, dx$ *d*) $\displaystyle\int 3x^{1/2} + x^{-1/3}\, dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$ *f*) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{2}{x} + 3e^x\, dx$ *h*) $\displaystyle\int 2\cos(x) - 3\,\text{sen}(x)\, dx$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de sustitución.

a) $\displaystyle\int (3x+1)^7\, dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{1}{(-2x+4)^3}\, dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}\, dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{4x+2}\, dx$ *e*) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-x}\, dx$ *f*) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2+1}\, dx$ *h*) $\displaystyle\int x^3\sqrt{7+x^4}\, dx$ *i*) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^{3/5}}\, dx$

j) $\displaystyle\int (x^2+1)(x^3+3x)^{3/2}\, dx$ *k*) $\displaystyle\int \frac{(2+\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}\, dx$ *l*) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{3x+1}}}{\sqrt{3x+1}}\, dx$

m) $\displaystyle\int x^2 e^{-x^3+1}\, dx$ *n*) $\displaystyle\int x^{-1}\ln(x)\, dx$ *ñ*) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x}\, dx$

o) $\displaystyle\int x\,\text{sen}(3x^2)\,dx$ *p)* $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}\,dx$ *q)* $\displaystyle\int \cos^3(5x)\,\text{sen}(5x)\,dx$

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de integración por partes.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int 2x\ln(3x)\,dx$

d) $\displaystyle\int 4x(2x+3)^{-5}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int x^2(2x-1)^5\,dx$ *f)* $\displaystyle\int (x+4)^2x^{1/3}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x-1}}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int (x+2)\ln(x)\,dx$ *i)* $\displaystyle\int (x^2+1)e^{-x}\,dx$

j) $\displaystyle\int (2x-1)^2\sqrt{x+1}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int (3x^2-2x)\ln(x)\,dx$ *l)* $\displaystyle\int (2x-1)\ln^2(x)\,dx$

m) $\displaystyle\int x\cos(x)\,dx$ *n)* $\displaystyle\int x^2\,\text{sen}(x)\,dx$ *ñ)* $\displaystyle\int x\,\text{sen}(2x)\,dx$

Ejercicio 6. Calcular las siguientes integrales indefinidas.

a) $\displaystyle\int (2x+1)e^{2x+1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x-2)\ln(3x-2)}$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(3+e^{2x})^5}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{9x^2+15}{\sqrt[4]{x^3+5x+1}}\,dx$

e) $\displaystyle\int (2x+1)\,\text{sen}(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x\,\text{sen}(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

g) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\,dx$

Ejercicio 7. Hallar $F(x)$ sabiendo que $F'(x)=5x\sqrt{x^2+8}$ y $F(1)=10$.

Ejercicio 8. Sea F la primitiva de $f(x)=(5x-2)e^{2x}$ que verifica $F(0)=1$. Hallar $F(x)$.

Ejercicio 9. El costo marginal de producir x unidades de cierto producto es

$$C'(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

y el costo de producir 2 unidades es de \$2. ¿Cuánto cuesta producir 12 unidades ?

Ejercicio 10. Sabiendo que la función ingreso marginal es $I'(q)=2000-20q-3q^2$, hallar:

a) la función ingreso total $I(q)$.

b) la función demanda $D(q)$.

Ejercicio 11. La función demanda marginal de cierto artículo de consumo es

$$D'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1000-2x}}$$

con $0 \leq x < 500$. Calcular la función ingreso total $I(x)$, sabiendo que si se demandan 300 unidades, el ingreso total es $\$2700$.

Ejercicio 12. Calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2x^2 - x + 4\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{3x-2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-3}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} 5xe^{x^2-1}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 5 - \operatorname{sen}(x)\,dx$ *h)* $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$ *i)* $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{(1+\cos(3x))^2}\,dx$

Ejercicio 13.

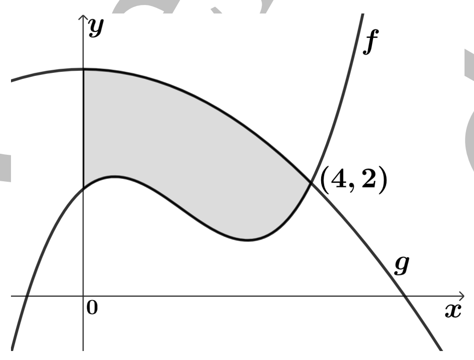
a) Sabiendo que $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 4$, calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} (2f(x)-1)\,dx$.

b) Sabiendo que $\displaystyle\int_{-2}^{4} (f(x)+2)\,dx = 5$, calcular $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$.

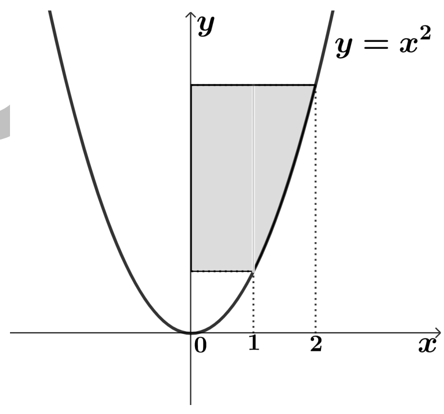
c) Sabiendo que $\displaystyle\int_{1}^{3} (f(x)+x)\,dx = -7$ y $\displaystyle\int_{1}^{5} 3f(x)\,dx = 9$, calcular $\displaystyle\int_{3}^{5} f(x)\,dx$.

Ejercicio 14. Plantear mediante integrales el área de la región sombreada.

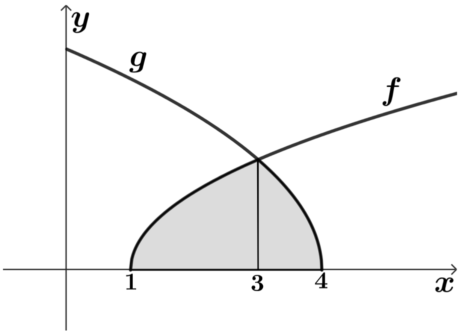
a)



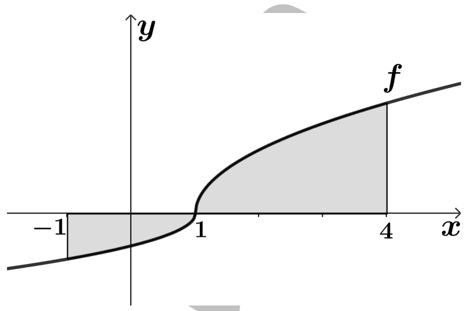
b)



c)



d)



Ejercicio 15. Calcular el área de la región limitada por los gráficos de:

a) $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 1$.

b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ y $g(x) = 4 - x$.

c) $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 + 3x$.

d) $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-x}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

e) $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{9}$ y el eje x.

f) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ y el eje y.

g) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ y el eje x.

Ejercicio 16. En cada caso, hallar el área de la región encerrada por el gráfico de:

a) $f(x) = \dfrac{6}{x-2} - 3$ y el eje x para $3 \leq x \leq 8$.

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, la recta $y = 2$ y los ejes coordenados.

c) $f(x) = 4x - x^2$, la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 3$ y el eje y.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 8$.

e) $f(x) = x^2 + 2x - 4$ y la recta $y = -x + 6$ para $0 \leq x \leq 4$.

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{3}x - 3\right)$ y el eje x para $5 \leq x \leq 9$.

g) $f(x) = \cos(x)$ y el eje x para $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

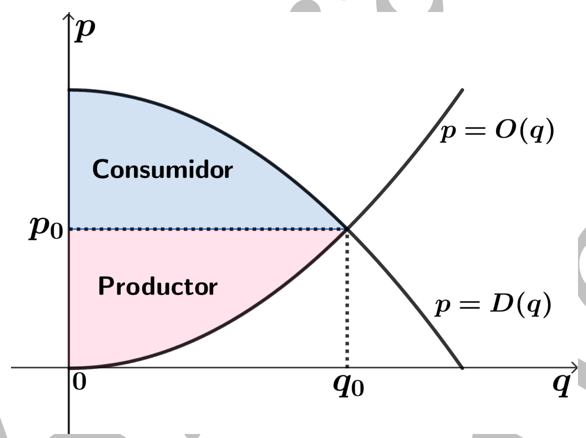
Aplicación: *Excedente del consumidor y del productor o del fabricante* (Ejercicios 17 al 20)

- El *excedente del consumidor* es el área comprendida entre la curva de demanda $p = D(q)$ y la recta $y = p_0$, siendo $p_0 = D(q_0)$ el precio de equilibrio del mercado:

$$EC = \int_0^{q_0} \left(D(q) - p_0\right) \, dq$$

- El *excedente del productor o del fabricante* es el área comprendida entre la curva de oferta $p = O(q)$ y la recta $y = p_0$, siendo $p_0 = D(q_0)$ el precio de equilibrio del mercado:

$$EP = \int_0^{q_0} \left(p_0 - O(q)\right) \, dq$$



Ejercicio 17. La funciones de demanda y de oferta para cierto producto son respectivamente $p = D(q) = 100 - 0,05q$ y $p = O(q) = 10 + 0,1q$. Hallar:

a) el punto de equilibrio del mercado.

b) el excedente de los consumidores cuando el mercado está en equilibrio.

c) el excedente de los fabricantes cuando el mercado está en equilibrio.

Ejercicio 18. La función de demanda para un producto es $p = D(x) = \dfrac{12}{x+1}$ y la función de oferta es $p = O(x) = x + 2$. Calcular el excedente del consumidor y del productor cuando el mercado está en equilibrio.

Ejercicio 19. Calcular el excedente del consumidor sabiendo que la función de demanda es $p = D(q) = \dfrac{4500}{\sqrt[3]{(q+1)^2}} + 1200$ y que el precio de equilibrio del mercado es $1700.

Ejercicio 20. Hallar el excedente del productor si la función oferta es $O(x) = 30 + \sqrt{9x + 10}$ y el equilibrio de mercado se alcanza cuando se producen 10 unidades.

Ejercicio 21. Calcular las siguientes integrales impropias.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-8}}\, dx$

d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(3x-2)^3}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^3+3x)^2}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$

g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{3}{x\ln(x)}\, dx$

h) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\, dx$

Ejercicio 22. Hallar el valor de $a > 0$ para el cual $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{(e^{ax}+1)^2}\, dx = \frac{1}{10}$.

Ejercicio 23. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

a) Una primitiva de $f(x) = x\ln(3x)$ es $F(x) =$

$\boxed{a}$ $\dfrac{x^2}{2}\ln(3x) - \dfrac{x^2}{4}$ $\boxed{b}$ $\dfrac{x^2}{2}\ln(3x) - 1$

$\boxed{c}$ $\ln(3x) + 1$ $\boxed{d}$ $\dfrac{x^2}{2}\ln(3x) - \dfrac{x^2}{12}$

b) Si $\displaystyle\int_0^3 (2f(x)+5)\, dx = 10$, entonces $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx =$

$\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ -10 $\boxed{c}$ $-\dfrac{5}{2}$ $\boxed{d}$ $\dfrac{5}{2}$

c) La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$ es igual a

$\boxed{a}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{b}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{c}$ 1 $\boxed{d}$ 2

d) Si en la integral $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{x^2+1}\, dx$ se hace la sustitución $u = x^2+1$, se obtiene

$\boxed{a}$ $2\displaystyle\int \frac{e^{u-1}}{u}\, du$ $\boxed{b}$ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^{u+1}}{u}\, du$ $\boxed{c}$ $\displaystyle\int \frac{e^{u-1}}{u}\, du$ $\boxed{d}$ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{e^{u-1}}{u}\, du$

e) El área de la región encerrada por la parábola $y = 3x^2$ y la recta $y = 6x$ vale

$\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ 4 $\boxed{c}$ 6 $\boxed{d}$ 20

f) Si $g'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$ y $g(2) = 9$, entonces $g(x) =$

$\boxed{a}$ $2\sqrt{x^2+5}$ $\boxed{b}$ $\sqrt{x^2+5}+6$

$\boxed{c}$ $2\sqrt{x^2+5}+3$ $\boxed{d}$ $\ln(\sqrt{x^2+5}) + 9 - \ln(3)$

g) El ingreso marginal está dado por $I'(q) = \dfrac{2q+3}{q^2+3q+e^2}$. Se sabe que el ingreso total es nulo cuando no hay ventas. Entonces el ingreso total $I(q)$ es igual a

$\boxed{a}$ $\ln(2q+3)$ $\boxed{b}$ $\ln(q^2+3q+e^2)$

$\boxed{c}$ $\ln(2q+3) - \ln(3)$ $\boxed{d}$ $\ln(q^2+3q+e^2) - 2$

h) El área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 3\sqrt{x}$ y $g(x) = -x+4$ para $0 \le x \le 4$ se obtiene calculando

$\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx$

$\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 g(x)\,dx$

$\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx + \int_1^4 (f(x) - g(x))\,dx$

$\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^4 (g(x) - f(x))\,dx$

i) Si la función oferta está dada por $p = O(x) = 3x^2 + 55$ y el punto de equilibrio es $(15, 730)$, entonces el excedente del fabricante es

$\boxed{a}$ $\displaystyle\int_{15}^{730} (3x^2+55)\,dx$ $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{730} (3x^2+55)\,dx$

$\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{15} (3x^2-675)\,dx$ $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{15} (675-3x^2)\,dx$

Práctica 7: Sucesiones y series

Ejercicio 1. Para las siguientes sucesiones, escribir el término que sigue a continuación, suponiendo que el patrón de los primeros cuatro términos continúa.

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

b) $1, 5, 9, 13, \ldots$

c) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \ldots$

d) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$

Ejercicio 2. Escribir los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 100 + 20(n-1)$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

c) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

d) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Ejercicio 3. Hallar el término general o n-ésimo de las sucesiones del ejercicio 1.

Ejercicio 4. En cada caso, hallar la progresión aritmética a_n que verifica:

a) $a_1 = 35$, $a_2 = 50$

b) $a_3 = 8$, $a_5 = 6$

c) $a_7 = 10$, $a_{10} = 5$

Ejercicio 5. Calcular el tercer término de una progresión aritmética a_n que verifica $a_2 = 15$ y $a_6 = -5$.

Ejercicio 6. Hallar la progresión aritmética a_n sabiendo que $a_3 = 14$ y que la suma de sus dos primeros términos es igual a 10.

Ejercicio 7. Supongamos que el precio del dólar aumenta $\$0,005$ por día y que hoy cotiza a $\$14$.

a) Sea C_n la cotización del dólar al cabo de n días. Comprobar que C_n es una progresión aritmética.

b) ¿Cuántos días deberán transcurrir para que el dólar alcance el precio de $\$15$?

Ejercicio 8. En cada caso, hallar la progresión geométrica a_n que verifica:

a) $a_3 = 16$, $a_6 = 1024$

b) $a_2 = 10$, $a_4 = 360$

c) $a_4 = -\dfrac{40}{27}$, $a_7 = \dfrac{320}{729}$

Ejercicio 9. Hallar la progresión geométrica a_n sabiendo que su razón r es positiva, que $a_3 = 80$ y que $\dfrac{a_4}{a_2} = 16$.

Ejercicio 10. Calcular el décimo término de la progresión geométrica a_n que verifica $a_4 = 18$ y $a_7 = \dfrac{9}{4}$.

Ejercicio 11. La *tasa nominal anual* (TNA) para un plazo fijo es del $48\,\%$.

a) ¿A cuánto ascienden los intereses para un monto invertido de $100\,000$ en un mes ? ¿Cuál será el monto total a percibir ?

b) Si se renueva automáticamente cada mes, ¿cuál será el valor del monto después de tres meses ?

c) Sea M_n el monto al cabo de n meses. Comprobar que M_n es una progresión geométrica.

d) Si se sigue renovando automáticamente, ¿cuántos meses habrá que esperar para que el monto disponible supere los $\$200\,000$?

Ejercicio 12. Dadas las siguientes series geométricas, escribir el término general.

a) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{27} + \dfrac{4}{81} + \dots$

b) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} - \dfrac{16}{81} + \dots$

c) $-\dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{27} - \dfrac{5}{81} + \dfrac{5}{243} + \dots$

d) $4 + \dfrac{16}{3} + \dfrac{64}{9} + \dfrac{256}{27} + \dots$

Ejercicio 13. Analizar la convergencia y calcular la suma de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^{n-1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n 5^{1-n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 5^{n-1}}{4^{2n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n-3}} + \frac{2}{5^{n+1}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 2^{2n-1}}{4^n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{3n+1}}{4^{3n+1}}$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1}}{5^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^{n-1}}$

Ejercicio 14. Sea a_n una progresión geométrica tal que $a_2 = 6$ y $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 18$. Calcular a_4.

Ejercicio 15. Hallar, en cada caso, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series convergen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.k^n}{2^n}$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{n-1}}{k^{n+1}}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(k+1)^n}{2^n}$

Ejercicio 16. Hallar, en cada caso, el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 3$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{a^n} = 30$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}a^n}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{15}$

Ejercicio 17. En cada ítem, marcar la única respuesta correcta.

a) Si a_n es una progresión aritmética tal que $a_4 = -4$ y $a_{10} = -2$, entonces $a_{16} =$

$\boxed{a}$ -5 $\boxed{b}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{c}$ $-\frac{14}{3}$ $\boxed{d}$ 0

b) En una progresión geométrica de razón $r > 0$ se cumple $a_4 = 2$ y $a_6 = 4$. Entonces r es igual a

$\boxed{a}$ 4 $\boxed{b}$ 6 $\boxed{c}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{d}$ 2

c) La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 2}{7^{n-1}}$ es igual a

$\boxed{a}$ $\frac{49}{2}$ $\boxed{b}$ 42 $\boxed{c}$ 49 $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}$

d) La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$ es igual a

$\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{c}$ 4 $\boxed{d}$ $+\infty$

e) La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ es igual a

$\boxed{a}$ $\frac{7}{2}$ $\boxed{b}$ $\frac{7}{6}$ $\boxed{c}$ $\frac{1}{6}$ $\boxed{d}$ 6

f) La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^n}$ es igual a 1 si

$\boxed{a}$ $a = \frac{1}{2}$ $\boxed{b}$ $a = \frac{3}{2}$ $\boxed{c}$ $a = 0$ $\boxed{d}$ $a = 3$

g) Si $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{4^{n+1}}$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{4^n}$, entonces

$\boxed{a}$ S_1 converge y S_2 diverge

$\boxed{b}$ S_1 diverge y S_2 converge

$\boxed{c}$ S_1 y S_2 convergen

$\boxed{d}$ S_1 y S_2 divergen

h) Sean $4 < a < 6$, $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{4^{n+1}}$ y $S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{6^{n-1}}$. Entonces

$\boxed{a}$ S_1 converge y S_2 diverge

$\boxed{b}$ S_1 diverge y S_2 converge

$\boxed{c}$ S_1 y S_2 convergen

$\boxed{d}$ S_1 y S_2 divergen

PROGRAMA ANALÍTICO

- **Unidad N$^\circ$ 1: Números Reales**

  La recta real. Relaciones de orden. Consistencia con las operaciones. Subconjuntos de la recta: intervalos, unión e intersección. Desigualdades elementales. Valor absoluto, distancia, entornos. Conjuntos acotados. Supremo e ínfimo.

- **Unidad N$^\circ$ 2: Funciones**

  Concepto de función. Funciones reales: dominio e imagen. Funciones algebraicas: lineales, cuadráticas, polinómicas, homográficas. Composición de funciones. Función inversa. Funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Aplicaciones económicas: funciones de oferta, demanda, ingreso, costo, ganancia.

- **Unidad N$^\circ$ 3: Límites y Continuidad**

  Límites en el infinito. Cálculo de límites: álgebra de límites, resolución de indeterminaciones. Límites especiales: el número e. Asíntotas horizontales. Cálculo de límites: límites en un punto, álgebra de límites, resolución de indeterminaciones. Límites laterales. Asíntotas verticales. Continuidad. Clasificación de discontinuidades. Teorema de Bolzano. Positividad y negatividad de funciones. Aproximación de raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

- **Unidad N$^\circ$ 4: Derivadas**

  Definición de derivada. Razón instantánea de cambio. Recta tangente. Cálculo de derivadas. Derivada de funciones elementales. Álgebra de derivadas. Regla de la cadena. Derivada logarítmica. Funciones marginales. Elasticidad de la demanda. Teorema del valor medio de Lagrange. Consecuencias: crecimiento y decrecimiento. Aplicaciones económicas: ganancia máxima. Teorema de Fermat. Estudio de funciones: puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión, gráfico de la función. Extremos en intervalos cerrados.

- **Unidad N$^\circ$ 5: Regla de L'Hôpital. Polinomio de Taylor**

  Cálculo de límites mediante la Regla de L'Hôpital: resolución de indeterminaciones, cálculo de derivadas de funciones partidas. Polinomio de Taylor de 1er., 2do. y 3er. orden. Cálculo aproximado de funciones.

- **Unidad N$^\circ$ 6: Integrales**

  Primitivas e integrales indefinidas. Cálculo de integrales indefinidas: primitivas elementales, método de sustitución, método de integración por partes. Aplicaciones económicas: obtención de una función a partir de su función marginal. Integral definida: propiedades, teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow. Cálculo de áreas. Aplicaciones económicas: excedente del consumidor y del productor. Integrales impropias.

- **Unidad N$^\circ$ 6: Sucesiones y Series**

  Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones económicas: interés simple e interés compuesto. Suma finita de una progresión geométrica. Series geométricas.

Bibliografía:

- Haeussler, E. y Paul, F. (2003). *Matemáticas para Administración y Economía (10ma ed.)* Pearson Educación.

- Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable: Trascendentes Tempranas (4ta ed.)* McGraw Hill.